1. מיצאו לאילו ערכי a, b ממשיים הפונקציה הבאה רציפה בקטע $[-1,3]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-a}{x-3}, & -1 \leq x < 3 \\ b, & x = 3 \end{cases}$$

הפונקציה רציפה בקטע $[-1,3)$ כי שם היא הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x+1}-a}{x-3}$ אשר רציפה בקטע זה לפי הפרש, מנה, הרכבה של פונקציות רציפות. נשאר לבדוק רק מתי $f(x)$ רציפה משמאל ב-$x = 3$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x+1}-a}{x-3}$$

המכנה שואף ל-0, המונה שואף ל-$2 - a$, ולכן אם $a \neq 2$ אז הגבול לא קיים ובפרט הפונקציה לא רציפה משמאל ב-3. אם $a = 2$ אז לפי כפל בצמוד:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x - 3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$$

כלומר כדי שהפונקציה תהיה רציפה בקטע צריך להתקיים $a = 2, b = \frac{1}{4}$.

2. יהי $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ פולינום ממעלה שלישית. הוכיחו כי יש לו (לפחות) שורש אחד ממשי.

הפולינום הוא ממעלה שלישית בפרט $a \neq 0$. אם $a > 0$ אז $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$, ובפרט קיים x_0 כך ש-$P(x_0) > 0$. כמו כן $\lim_{x\to -\infty} P(x) = -\infty$ ובפרט קיים x_1 כך ש-$P(x_1) < 0$. לכן לפי משפט ערך הביניים ($P(x)$ רציף בכל הממשיים) קיים $x_1 < t < x_0$ כך ש-$P(t) = 0$ כדרוש.
אם $a < 0$ אז $\lim_{x\to\infty} P(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} P(x) = \infty$ והפתרון ממשיך אותו דבר.

3. תהי f פונקציה רציפה (כלומר, בכל הממשיים). הוכיחו כי קיים c ממשי כך ש-$f(c) = \frac{c}{1-c^2}$.

נגדיר $g(x) = f(x)(1-x^2) - x$. הפונקציה $g(x)$ רציפה כמכפלה והפרש של פונקציות רציפות.
מתקיים $g(1) = -1, g(-1) = 1$ ולכן לפי משפט ערך הביניים יש $-1 < c < 1$ כך ש-$g(c) = 0$
כלומר $f(c)(1-c^2) - c = 0$ כלומר $f(c) = \frac{c}{1-c^2}$ כדרוש.

4. תהי $f: [0,1] \to [0,1]$ רציפה. הוכיחו כי קיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ כך ש-$f(x_0) = 2\sin(x_0)$.

נגדיר $g(x) = f(x) - 2sin(x)$, היא רציפה ב-$[0,1]$ כהפרש של פונקציות רציפות. מתקיים

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)-1\le 0$$

(כי $f\left(\frac{\pi}{6}\right)\le 1$ כי $f:[0,1]\to[0,1]$)

וכן

$$g(0)=f(0)\ge 0$$

אם $g(0)=0$ אז סיימנו עם $x_0=0$, אם $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ אז סיימנו עם $x_0=\frac{\pi}{6}$, ואם לא אז לפי משפט ערך הביניים יש $0<x_0<\frac{\pi}{6}$ כך ש-$g(x_0)=0$ כלומר $f(x_0)=2sin(x_0)$ כדרוש.

5. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קיבעו (והוכיחו) האם היא רציפה במ"ש בקטע הנתון:

א. $f(x)=xsin(x)$ ב-$(0,\infty)$.

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n=2\pi n$$

$$y_n=\frac{1}{n}+2\pi n$$

כמובן $x_n-y_n\to 0$. כמו כן מתקיים

$$f(x_n)=2\pi n\,sin(2\pi n)=0$$

$$f(y_n)=\left(\frac{1}{n}+2\pi n\right)sin\left(\frac{1}{n}+2\pi n\right)=\left(\frac{1}{n}+2\pi n\right)sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

ולכן

$$f(y_n)-f(x_n)=\left(\frac{1}{n}+2\pi n\right)sin\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}sin\left(\frac{1}{n}\right)+2\pi n\,sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

המחובר השמאלי שואף ל-0 (מכפלה של שני גורמים השואפים ל-0), והמחובר הימני הוא

$$2\pi\frac{sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\to 2\pi$$

ולכן סה"כ $f(y_n)-f(x_n)\to 2\pi\neq 0$ כלומר הפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון.

ב. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ב-$(0,1)$.

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n=\frac{1}{2\pi n}$$

$$y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$$

כמובן $x_n-y_n\to 0$. כמו כן מתקיים

$$f(x_n)=sin(2\pi n)=0$$

$$f(y_n)=sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

ולכן

$$f(x_n)-f(y_n)=-1\to -1\ \neq 0$$

ג. $f(x)=xsin(\frac{1}{x})$ ב-$(0,1)$.

הפונקציה רציפה ב-$(0,1)$, וכמו כן קיימים הגבולות מימין ב-0 ומשמאל ב-1:

$$\lim_{x\to 0^+} xsin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

(פונקציה השואפת ל-0 כפול פונקציה חסומה)

$$\lim_{x\to 1^-} xsin\left(\frac{1}{x}\right)=sin(1)$$

(הצבה בביטוי שרציף ב-1)

ולכן לפי תרגיל שפתרנו בכיתה, הפונקציה רציפה במ"ש ב-$(0,1)$.

להלן חזרה על הטיעון שכבר ראינו: מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ בקטע $[0,1]$:

$$g(x)=\begin{cases} xsin\left(\frac{1}{x}\right), & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

וכיוון שהיא רציפה בקטע סגור אז לפי קנטור היא רציפה במ"ש שם, ולכן היא גם רציפה במ"ש ב-$(0,1)$, ובקטע זה הפונקציה מזדהה עם $f(x)$.

ד. $f(x)=\ln(x)$ ב-$(0,\infty)$

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n=\frac{1}{n}$$

$$y_n=\frac{2}{n}$$

מתקיים $x_n-y_n\to 0$. כמו

$$f(x_n)-f(y_n)=ln\left(\frac{1}{n}\right)-ln\left(\frac{2}{n}\right)=-ln(n)-\big(ln(2)-ln(n)\big)=-ln(2)\to -ln(2)\neq 0$$

ה. $f(x)=x^3$ ב-$(-\infty,50]$

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n=-n$$

$$y_n=-\left(n+\frac{1}{n}\right)$$

מתקיים $x_n-y_n\to 0$. כמו כן

$$f(x_n)-f(y_n)=-n^3+\left(n+\frac{1}{n}\right)^3=-n^3+n^3+3n+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\to\infty\neq 0$$

ו. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ב-$[0,\infty)$

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}$$

$$y_n = 1 + \frac{2}{n}$$

מתקיים $x_n - y_n \to 0$. כמו כן

$$f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 1} - \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}$$

$$= \frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{4n+4} = n^2\frac{(4n+4)-(2n+1)}{(2n+1)(4n+4)} = \frac{2n^3+3n^2}{(2n+1)(4n+4)} \to \infty \neq 0$$

6. הוכיחו כי חיבור וכפל בקבוע (ולכן גם חיסור) של פונקציות רציפות במ"ש, הוא פונקציה רציפה במ"ש.

(i) תהי $f(x)$ רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$, ויהי $c \in \mathbb{R}$. נראה כי $cf(x)$ רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

יהי $\epsilon > 0$. מחפשים $\delta > 0$ כך שלכל x_1, x_2 המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|cf(x_1) - cf(x_2)| < \epsilon$. אם $c = 0$ אז אגף שמאל=0 ולכן ודאי קטן מכל $\epsilon > 0$. אחרת, אי-השוויון שקול ל-

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{c}$$

כיוון ש-$f(x)$ רציפה במ"ש, אכן ניתן למצוא $\delta > 0$ כך שלכל x_1, x_2 המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{c}$, כדרוש.

(ii) יהיו $f(x), g(x)$ רציפות במ"ש, נראה כי $f(x) + g(x)$ רציפה במ"ש.

יהי $\epsilon > 0$. מחפשים $\delta > 0$ כך שלכל x_1, x_2 המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים

$$|f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)| < \epsilon$$

כיוון ש-$f(x)$ רציפה במ"ש, יש $\delta_1 > 0$ כך שלכל x_1, x_2 המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta_1$ מתקיים

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

כמו כן כיוון ש-$g(x)$ רציפה במ"ש יש $\delta_2 > 0$ כך שלכל x_1, x_2 המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta_2$ מתקיים

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

נבחר $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ ואז לכל x_1, x_2 המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים הדרוש:

$$|f(x_1)+g(x_1)-f(x_2)-g(x_2)| \le |f(x_1)-f(x_2)|+|g(x_1)-g(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

7. תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,\infty)$, ונתון כי קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$. הוכיחו כי f רציפה במ"ש ב-$[a,\infty)$.

יהי $\epsilon>0$. צריך למצוא $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in[a,\infty)$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$. נסמן $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$. לפי הגדרת הגבול יש A כך שלכל $x>A$ מתקיים $|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{2}$. לכן לכל $x_1,x_2>A$ מתקיים (*)

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-L+L-f(x_2)| \le |f(x_1)-L|+|f(x_2)-L\} < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

$f(x)$ רציפה במ"ש ב-$[a,A+1]$ לכן יש $\delta'>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in[a,A+1]$ המקיימים

$|x_1-x_2|<\delta'$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$. (**)

נבחר $\delta=min(\delta',1)$. צריך להראות שלכל $x_1,x_2\in[a,\infty)$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים

$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$.

אם $x_1,x_2\in[a,A+1]$ אז סיימנו לפי (**).

אם $x_1,x_2\in[A,\infty)$ אז סיימנו לפי $(*)$.

נראה כי אלה הן שתי האפשרויות היחידות: אם שתי האפשרויות האלה לא מתקיימות אז בהכרח מתקיים בה"כ $x_1\notin[A,\infty], x_2\notin[a,A+1]$. כלומר מתקיים $x_1<A$, $x_2>A+1$, ולכן $x_2-x_1>A+1-A=1$. זו סתירה כי מתקיים $|x_1-x_2|<\delta\le 1$.