תרגול 1 – אדם צ'פמן

שאלה:

נתונה כיתה בת 12 תלמידים.

1. בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את התלמידים ברשימת תורנות כיתה?
2. בוחרים ועד כיתה בן 3 נציגים. בכמה דרכים שונות ניתן להרכיב את הועד?
3. בוחרים שני תלמידים לשני תפקידים, אחראי ימי-הולדת ואחראי חגים. (אי-אפשר למנות את אותו התלמיד לשני התפקידים.) כמה אפשרויות יש לביצוע המינויים?
4. עושים רשימת קניות גלידה לכיתה. כל תלמיד בוחר צלוחית עם כדור גלידה באחד הטעמים – שוקולד, וניל, תות ובננה. מכינים רשימת קניות שכוללת את הטעמים וכמה כדורים נבחרו מכל טעם. כמה דרכים יש להכנת רשימת הקניות?

תשובה:

1. $12!$.
2. $\binom{12}{3}$.
3. $12 \cdot 11$.
4. השאלה שקולה לשאלת הנחת 12 כדורים (זהים) ב4 תאים שונים. לכן התשובה היא $\binom{15}{3} = \binom{12+4-1}{4-1}$.

שאלה:

מסדרים בשורה 15 קוביות, מתוכן 5 אדומות, 7 לבנות ו3 ירוקות. בכמה סידורים שונים ניתן להבחין?

[איננו מבחינים בין קוביות שונות מאותו הצבע.]

תשובה:

השאלה שקולה לחלוקה של 15 משבצות נתונות (שמסודרות, נגיד, בשורה) לקבוצות A, B, C מגדלים 5,7,3.

לכן הנוסחה הרלוונטית היא המולטינום $\binom{15}{5,7,3} = \frac{15!}{5!\cdot 7!\cdot 3!}$.

שאלה:

ישנם שישה כדורים (זהים) וחמישה בקבוקים בצבעים ירוק, אדום, כחול, צהוב ואפור.

1. בכמה דרכים ניתן להניח את הכדורים בבקבוקים?

2. בכמה דרכים ניתן להניח את הכדורים בבקבוקים ככה שבכל אחד מהבקבוקים הירוק, האדום והכחול יהיה לפחות כדור אחד?

תשובה:

1. $\binom{5+6-1}{5-1} = \binom{10}{4}$.
2. מכיוון שצריך להניח קודם כל כדור אחד בכל אחד משלושת הבקבוקים, הירוק, האדום והכחול, נשארים לנו שלושה כדורים להניח בבקבוקים הנותרים. לכן התשובה היא $\binom{7}{3} = \binom{5+3-1}{3}$.

שאלה:

בקרטון נמצאות 50 נורות, מתוכן 15 מקולקלות. אדם שולף באופן אקראי 3 נורות מהקרטון. כמה אפשרויות יש לשליפת שלוש נורות כך שלפחות אחת מהן תקינה?

תשובה:

נחשב את סך כל השליפות האפשריות ונפחית ממנו את מספר השליפות שבהן כל הנורות מקולקלות.

מדובר ב$\binom{50}{3} - \binom{15}{3}$.

שאלה:

כמה אפשרויות יש לסידור 7 אנשים בשורה כך ש

1. משה ורינה יעמדו זה לצד זה?
2. משה, רינה ויואל יעמדו זה לצד זה?

תשובה:

ישנן כמה אפשרויות להבין את השאלה. אחת מהן היא לראות במשה-רינה (או משה-רינה-יואל) בן-אדם אחד, לסדר את 6 (או 5) האנשים בשורה, ואז להכפיל בכמות האופציות לסידור 2 (או 3) אנשים. לכן התוצאות תהיינה $6! \cdot 2!$ או $5! \cdot 3!$.

דרך נוספת היא לבחור שני מקומות סמוכים שבהם יוצבו משה ורינה (או שלושה מקומות סמוכים שבהם יוצבו משה, רינה ויואל), לסדר בהם את השניים (או השלושה) ואז לסדר את חמשת (או ארבעת) האנשים הנותרים.

במקרה הזה נקבל $6 \cdot 2! \cdot 5!$ (או $5 \cdot 3! \cdot 4!$), שזו אותה התוצאה כמו קודם.

[דרכים שונות מובילות לתוצאות זהות במידה ושתי הדרכים נכונות!]

אחת הסיבות לעדיפות השיטה השנייה (לפחות כדאי להבין את השיטה השנייה) היא שאם עכשיו נשנה את הסידור בשורה לסידור במעגל, אז המספר 6 (או המספר 5 בחלק ב) ישתנה ל7, כלומר מספר האופציות יהיה

$7 \cdot 2! \cdot 5!$ (או $7 \cdot 3! \cdot 4!$).

שאלה:

1. כמה מילים שונות ניתן ליצור תוך כדי שימוש בכל האותיות של ABRACADABRA?
2. כמה מילים מהן לא מכילות זוג אותיות A סמוכות זו לזו?

תשובה:

1. ישנם 5 עותקים של A, 2 של B, 2 של R, 1 של C ו1 של D. לכן התשובה היא $\binom{11}{5,2,2,1,1}$.
2. קיימות מספר דרכים לפתור את השאלה. נסתפק כעת באחת. נשים לב שמדובר במכפלת שני מאורעות בלתי-תלויים, אחד זה יצירת 6 מרווחים בין האותיות A, לפניהן ואחריהן, כך שבין כל שני מופעים של A יש לפחות רווח אחד, ובניית מילה המורכבת מ2 עותקים של B, 2 של R, 1 של C ו1 של D. את המילה שבנינו משבצים ברווחים הנתונים בין העותקים של A, וכך מתקבלת מילה מהסוג הרצוי. מספר הדרכים לבנות מילה מ2 עותקים של B, 2 של R, 1 של C ו1 של D הוא $\binom{6}{2,2,1,1}$. מספר האפשרויות למקם 6 רווחים בין העותקים של A, לפניהם ואחריהם, כך שבין כל שני עותקים של A יש לפחות רווח אחד שווה למספר האפשרויות להניח שני כדורים בשישה כדים שונים, דהיינו $\binom{7}{2}$. לכן התוצאה היא $\binom{6}{2,2,1,1} \cdot \binom{7}{2}$.

שאלה:

בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה של $2n$ אנשים לn זוגות?

תשובה:

המקדם המולטינומי $\binom{2n}{2,\ldots,2}$ נותן את מספר האפשרויות לשייך את אברי הקבוצה בת $2n$ אנשים לקבוצות $A_1, \ldots, A_n$ כך שכל קבוצה תכיל בדיוק שני איברים.

מכיוון שסדר הקבוצות $A_1, \ldots, A_n$ לא חשוב, צריך לחלק את התוצאה במספר הסידורים של הקבוצות האלה, שהוא $n!$.

לכן, התשובה הסופית תהיה $\binom{2n}{2,\ldots,2} \cdot \frac{1}{n!}$.

דוגמה: קבוצה בת ארבעה אנשים $\{A, B, C, D\}$ ניתן לחלק לזוגות בשלושה אופנים

$\{A, B\}, \{C, D\}$

$$\{A, C\}, \{B, D\}$$

$$\{A, D\}, \{B, C\}$$

או לפי הנוסחה

$$\frac{1}{2!} \cdot \binom{4}{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 3$$

הערה: שימו לב שהמקדם המולטינומי כשלעצמו איננו תשובה סופית. זאת משום שהוא מייחס חשיבות גם לשמות (סדר) של הקבוצות $A_1, \ldots, A_n$. עבורנו אין חשיבות לסדר הקבוצות (הזוגות). למשל, בדוגמה

$$\{A, B\}, \{C, D\}$$

$$\{C, D\}, \{A, B\}$$

הן חלוקות זהות. לכן אנחנו צריכים לחלק את המקדם המולטינומי ב $n!$.