הרצאה 13

נכתב על ידי נועם יערי

27.07.2016

משפט קיום ויחידות עבור מערכת של n משוואות מסדר 1

סימונים:

$$\vec{y}(x) = \big(y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\big)$$
$$\vec{y}\,'(x) = \big(y_1'(x), y_2'(x), \cdots, y_n'(x)\big)$$

אזי:

$$\vec{y}\,'(x) = f(x, \vec{y}) = (f_1(x, \vec{y}), f_2(x, \vec{y}), \cdots, f_n(x, \vec{y})$$

מערכת משוואות, כלומר:

$$y_1'(x) = f_1(x, y_!, \cdots, y_n)$$
$$y_2'(x) = f_2(x, y_1, \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n'(x) = f_n(x, y_1, \cdots, y_n)$$

בעיית קושי היא מערכת כזו עם קביעת תנאי התחלה:

$$y_1(x_0) = c_1$$
$$y_2(x_0) = c_2$$
$$\vdots$$
$$y_n(x_0) = c_n$$

משפט

אם $f_1, \cdots, f_n$ רציפות בכל התחום $\{|x - x_0| \le \alpha,\ \ |y_i - c_i| \le \beta_i\}$ מתקיים תנאי ליפשיץ ב - $\vec{y}$ עבור כל f_i בכל x, כלומר:

$$|f_i(x), \vec{y}_1) - f_i(x, \vec{y}_2)| \le L \cdot \big||\vec{y}_1 - \vec{y}_2|\big|_{\mathbb{R}^n}$$

אזי קיים פתרון למערכת, הפתרון יחיד והוא בתחום:

$$|x - x_0| \le \min\{\alpha, \frac{\beta_1}{\sup|f_1|}, \cdots, \frac{\beta_n}{\sup|f_n|}\}$$

הערה

משוואה מסדר n

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

שקולה למערכת n משוואות מסדר ראשון:

$$y_n'(x) = F(x, y_1, y_2, \cdots y_n)$$
$$y_1' = y_2$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1}' = y_n$$

הערה

<u>מעכשיו, כל המערכות לינאריות</u>

- משפט ליוביל – אוסטרוגרדסקי – Liouville Ostrogradski (אנלוגי למשפט אבל)

-וריאציית מקדמים (פתרון מערכת אי – הומוגנית באמצעות פתרון כללי הומוגני)

-תיאור קבוצת פתרונות למערכת הומוגנית (מרחב וקטורי n מימדי), למערכת אי הומוגנית (מרחב וקטורי + פתרון פרטי)

משפט

מערכת לינארית היא הומוגנית $\Leftrightarrow$ $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ $\Leftrightarrow$ הווקטור הבא פותר את המערכת:

$$\begin{cases} y_1(x) \equiv 0 \\ y_2(x) \equiv 0 \\ \quad\vdots \\ y_n(x) \equiv 0 \end{cases}$$

מערכת אי - הומוגנית

$$y'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

כאשר $\vec{b}(x)$ וקטור של פונקציות ב – x בלבד.

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

הערה

ברור שקבוצת הפתרונות למערכת לינארית הומוגנית מהווה מרחב וקטורי.

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y}$$

$$\vec{z}' = A(x)\vec{z}$$

$$(\vec{y}+\vec{z})' = A(x)(\vec{y}+\vec{z})$$

$$\alpha\vec{y}' = A(x)\cdot\alpha\cdot\vec{y}$$

המרחב הוא n מימדי כי משפט קיום ויחידות נותן איזומורפיזם עם קבוצת תנאי ההתחלה שהיא $\mathbb{R}^n$.

כמו כן, הפרש בין 2 פתרונות למערכת אי הומוגנית פותר את המשוואה ההומוגנית, ולכן פתרון כללי הוא:

$$\vec{y} = \underbrace{\vec{y}_h}_{\substack{\text{פתרון כללי}\\ \text{למערכת הומוגנית}}} + \underbrace{\vec{y}_p}_{\substack{\text{פתרון פרטי למערכת}\\ \text{האי הומוגנית}}}$$

פתרון יסודי למערכת n משוואות מסדר ראשון ביחס לנקודה x_0:

$$Y = (\vec{y}_1 \quad \vec{y}_2 \quad \cdots \quad \vec{y}_n) = \begin{pmatrix} (y_1)_1 & (y_2)_1 & \cdots & (y_n)_1 \\ (y_1)_2 & (y_2)_2 & \cdots & (y_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1)_n & (y_2)_n & \cdots & (y_n)_n \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$\vec{y}_1(x_0) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\vec{y}_n(x_0) = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

או במילים אחרות, $Y(x_0) = I$. לכל מטריצה הפיכה קבועה C ניתן להשתמש גם במטריצה $Y(x)\cdot C$ אבל לרוב נוח יותר להשתמש ב – Y.

הפתרון היסודי הוא האנלוג שלנו לוורונסקיאן (כאשר $y_n = y^{(n-1)}$ מקבלים את הוורונסקיאן המוכר).

משפט (Liouville Ostrogradski)

$$\Delta(x) := \det Y(x)$$

כאשר Y הוא פתרון [יסודי] על מערכת ליניארית הומוגנית מסדר n:

$$\vec{y}' = A(x) \cdot \vec{y}$$

אזי:

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = -Tr\left(A(x)\right) \cdot D(x)$$

ולכן:

$$\Delta(x) = \Delta(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} Tr\left(A(x)\right) \cdot dx}$$

הערה

$$y'' = p(x)y' + q(x)y$$

אם נסמן:

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y'$$

$$y_1' = 0 \cdot y_1 + y_2$$

$$y_2' = q(x)y_1 + p(x)y_2$$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & p(x)_{=trace} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

הוכחת Liouville Ostrogradski:

העתק של הוכחת משפט אבל:

$$\Delta'(x) = \overbrace{\begin{vmatrix} (y_1)_1' & (y_2)_1' & \cdots & (y_n)_1' \\ (y_1)_2 & (y_2)_2 & \cdots & (y_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_1)_n & \cdots & \cdots & (y_n)_n \end{vmatrix}}^{a_{11}(x) \cdot \Delta(x)} + \cdots + \begin{vmatrix} (y_1)_1 & (y_2)_1 & \cdots & (y_n)_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_1)_{n-1} & (y_2)_{n-1} & \cdots & (y_2)_{n-1} \\ (y_1)_n & \cdots & \cdots & (y_n)_n \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(x)(y_i)_1 + \underbrace{a_{12}(x)(y_i)_2 + \cdots + a_{1n}(x)(y_i)_n}_{\text{התרומה של אלו מתבטלת בדטרמיננטה הראשונה}}$$

דוגמה

ניקח את המערכת

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

ונבדוק שהזוג הבא $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ פותר:

(כלומר, $y(x) \equiv 1$, $z(x) \equiv x$)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

הערה

נשים לב:

$$Tr \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix} \equiv 0$$

מליוביל נקבל:

$$\Delta(x) = C_1$$

$$\Longrightarrow C_1 = \Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & y(x) \\ x & z(x) \end{vmatrix} = z(x) - x \cdot y(x) = C_1$$

מהמערכת רואים ש $y' = y - \frac{1}{x} z$

$$\Longrightarrow y'(x) = -\frac{C_1}{x}$$

$$\Longrightarrow y(x) = -C_1 \log x + C_2$$

$$\Longrightarrow z(x) = -C_1 x \log x + C_2 x + C_1$$