פתרון8:

4.1 תרגיל. בדוק אילו מזוגות הוקטורים הבאים מאונכים זה לזה:

א. $(0,1,0,2),(100,0,-999,0)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$.

ב. $(1,i),(1,i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

ג. $(1,i),(1,-i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

א.

$$\langle (0\quad 1\quad 0\quad 2),(100\quad 0\quad -999\quad 0)\rangle = 0+0+0+0=0 \Rightarrow (0\quad 1\quad 0\quad 2)\perp(100\quad 0\quad -999\quad 0)$$

ב.

$$\langle (1\quad i),(1\quad i)\rangle = 1\cdot\bar{1}+i\cdot\bar{i}=1+1=2\Rightarrow (1\quad i)\not\perp(1\quad i)$$

ג.

$$\langle (1\quad i),(1\quad -i)\rangle = 1\cdot\bar{1}+i\cdot\overline{(-i)}=1-1=0\Rightarrow (1\quad i)\perp(1\quad -i)$$

4.7 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n, ותהא $B\subseteq V$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. B בסיס אורתונורמלי.

ב.B קב' אורתונ' מגודל n

<u>B בסיס אורתונ'</u> $\Leftrightarrow$ B בסיס וגם קב' אורתונ'

$\Leftrightarrow$ B קב' של n וקטורים בת"ל וגם קב' אורתונ'<u>B</u> $\Leftrightarrow$ <u>קב' של n וקטורים וגם קב' אורתונ'</u>

(כי B אורתונ' אז B בפרט אורתוג' וכפי שנלמד בכיתה זה כבר גורר שהיא קב' בת"ל ולכן התנאי כלול בתוכה ואין צורך לציין אותו שוב)

4.9 תרגיל. הגדר (ישירות) על $V=\mathbb{R}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך ש $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ יהווה בסיס אורתונורמלי לגבי מכפלה זאת.

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$\downarrow$$

אם החזקה של אחד מהם נמוכה יותר אז יתר המקדמים עד n הם פשוט 0

נראה שזו מ"פ:

$$1.\left\langle \alpha\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \beta\sum_{i=0}^{n} c_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} \beta c_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha a_i + \beta c_i\right) x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha a_i + \beta c_i\right) b_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \beta\sum_{i=1}^{n} c_i b_i = \alpha\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle + \beta\left\langle \sum_{i=0}^{n} c_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle$$

$$2.\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \left\langle \sum_{i=0}^{n} b_i x^i , \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right\rangle$$

$$3.\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \geq 0. \qquad \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \qquad a_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0.$$

כמו כן נראה אורתונורמליות:

$$\forall i \neq j \qquad \left\langle x^i , x^j \right\rangle = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$$

$$\forall i \qquad \left\langle x^i , x^i \right\rangle = 1\cdot 1 = 1$$

5.4 תרגיל. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות, כאשר U, W תת–מרחבים של מרחב מכפלה פנימית V:

א. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

ב. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

ג. $(U+W)^{\perp} = (U \cap W)^{\perp}$.

א. הפרכה:

$$(\{0\}+V)^{\perp}=V^{\perp}$$
$$\{0\}^{\perp}+V^{\perp}=V+\{0\}=V$$

ב. הוכחה:

$$\supseteq:\ v\in U^{\perp}\cap W^{\perp}\Rightarrow v\in U^{\perp}\wedge v\in W^{\perp}\Rightarrow\begin{cases}\forall u\in U & \langle v,u\rangle=0\\ \forall w\in W & \langle v,w\rangle=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\forall u+w\in U+W\qquad\langle v,u+w\rangle=\langle v,u\rangle+\langle v,w\rangle=0\Rightarrow v\in(U+W)^{\perp}$$

$$\subseteq:\ v\in(U+W)^{\perp}\Rightarrow\forall u+w\in U+W\qquad\langle v,u+w\rangle=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{בפרט עבור } w=0\in W:\\ \quad\langle v,u+w\rangle=\langle v,u\rangle=0\Rightarrow\forall u\in U\quad\langle v,u\rangle=0\Rightarrow v\in U^{\perp}\\ \\ \text{ובפרט עבור } u=0\in U:\\ \quad\langle v,u+w\rangle=\langle v,w\rangle=0\Rightarrow\forall w\in W\quad\langle v,w\rangle=0\Rightarrow v\in W^{\perp}\end{array}\right\}\Rightarrow v\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$$

ג. הפרכה:

$$(\{0\}+V)^{\perp}=V^{\perp}$$
$$(\{0\}\cap V)^{\perp}=\{0\}^{\perp}=V$$

5.7 תרגיל. תהא $S=\{v_1,\dots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב V. הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים: $v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i\in S^{\perp}$.

$$\forall v_j\in S\quad\left\langle v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i,v_j\right\rangle=\langle v,v_j\rangle-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle\langle v_i,v_j\rangle\underset{\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}0,i\neq j\\1,i=j\end{cases}}{=}\langle v,v_j\rangle-\langle v,v_i\rangle(0+\dots+0+\underset{\substack{\downarrow\\ when\quad i=j}}{1}+0+\dots+0)=$$

$$\langle v,v_j\rangle-\langle v,v_j\rangle=0\Rightarrow v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i\in S^{\perp}$$

1. נתון: $S=\left\{\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$

א. בדוק ש S קבוצה ניצבת ושהיא בסיס ל- R^3.

ב. בטאו את הווקטור $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}8\\-4\\-3\end{bmatrix}$ כצירוף ליניארי של הוקטורים ב- S.

2. הטילו את הווקטור $\mathbf{b}$ על הישר דרך $\mathbf{a}$ לקבל ווקטור ההיטל $\mathbf{p}$. בדקו ש- $\mathbf{e}=\mathbf{p}-\mathbf{b}$ הוא ניצב ל- $\mathbf{a}$.

א. $\mathbf{a}=(1,2,2),\mathbf{b}=(1,1,1)$ ב. $\mathbf{a}=(1,2,1,2),\mathbf{b}=(1,-2,3,-4)$.

3. העביר את הקבוצה $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}\right\}$ לבסיס ניצב של $\mathbb{R}^3$ בשימוש השיטה שהצגנו בסוף השיעור (השיטה נקראת "גרם-שמידט").

4. העבר את הקבוצה $S=\left\{\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ לקבוצה ניצבת T ב $\mathbb{R}^3$ כך

ש $\operatorname{Span}T=\operatorname{Span}S$. כאן $\operatorname{Span}S=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$. מה הצורה של $\operatorname{Span}S$, הפורש של הווקטורים. בשימוש הנוסחאות מהכיתה מצא c_1,c_2 כך

ש $c_1\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\17\\17\end{bmatrix}$.

<u>פיתרונות 1-4:</u>

1)א.

$$S \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -1+0+1=0 \\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2+4-2=0 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2+0-2=0 \end{cases} \Rightarrow$$ קב' אורתוגונלית

S קב' בת"ל של 3 וקטורים ב $\Re^3$
ובסה"כ S בסיס אורתוגונלי ל $\Re^3$

ב.

לפי: $y = \frac{yu_1}{u_1^2} u_1 + \frac{yu_2}{u_2^2} u_2 + \frac{yu_3}{u_3^2} u_3$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2)

$$proj(u,v) = \frac{u \cdot \mathrm{v}}{|\mathrm{v}|^2}\mathrm{v}$$

א.

$$proj(b,a)=\frac{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\\frac{10}{9}\\\frac{10}{9}\end{pmatrix}$$

$$e=p-b=\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\\frac{10}{9}\\\frac{10}{9}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\\frac{1}{9}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\text{ניצבים}\Leftarrow\langle a,e\rangle=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\\frac{1}{9}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}=-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=0$$

ב.

$$proj(b,a)=\frac{\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{8}{5}\\-\frac{4}{5}\\-\frac{8}{5}\end{pmatrix}$$

$$e=p-b=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-1\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\\-1\frac{3}{5}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-3\frac{4}{5}\\2\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

ניצבים $\Leftarrow \langle a,e\rangle=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-3\frac{4}{5}\\2\frac{2}{5}\end{pmatrix}=-1\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-3\frac{4}{5}+4\frac{4}{5}=0$

(3

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{x}_2-\mathrm{pr}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_2-\frac{\mathbf{x}_2^T\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}-\mathrm{pr}_{\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1}\}}\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}-\frac{\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T\mathbf{v}_k}\mathbf{v}_k\ \ldots-\frac{\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

לכן:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

נבדוק אורתוגונליות:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(4

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathrm{pr}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^T\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

לכן:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

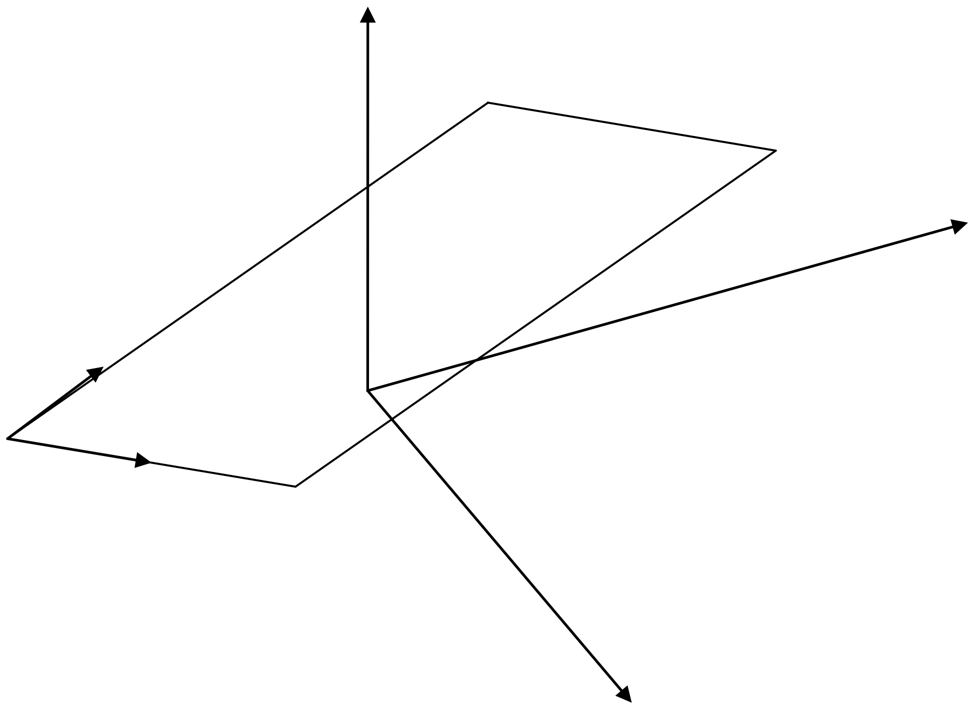
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \\ \frac{4}{25} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{25} \\ \frac{21}{25} \\ -1\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

נבדוק אורתוגונליות:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{22}{25} \\ \frac{21}{25} \\ -1\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{66+84-150}{25} = 0$$

$$\underline{T = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{22}{25} \\ \frac{21}{25} \\ -1\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right\}}$$

המרחב spanS נפרש ע"י שני וקטורים בת"ל ב- $\Re^3$ לכן צורתו <u>מישור</u> ב- $\Re^3$:



(הציור להמחשה בלבד ואיננו מתחשב בכיווני הוקטורים הפורשים)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 4 & 1 & 17 \\ 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 4 & 1 & 17 \\ 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 0 & -1/3 & -3 \\ 0 & -2\frac{2}{3} & -8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 0 & -1/3 & -3 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$\begin{pmatrix} 15 \\ 17 \\ 17 \end{pmatrix}$ איננו תלוי לנארית בוקטורים אלו,כלומר הוא איננו שייך למישור הנפרש על ידם.

דוגמא למציאת הצרוף הלנארי עבור וקטור שכן שייך:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 13 \\ 5 & -1 & 32 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8/3 \\ 0 & -1/3 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & -2\frac{2}{3} & 18\frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8/3 \\ 0 & -1/3 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1/3 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$c_1 = 5, c_2 = -7$$

או,ע"י הנוסחאות מהכיתה(הנכונות לבסיס הניצב!):

$$c_1^{'} = \frac{(8 \quad 13 \quad 32)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{(3 \quad 4 \quad 5)} = \frac{118}{25}$$

$$c_2^{'} = \frac{(8 \quad 13 \quad 32)\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ -30 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{22}{25} & \frac{21}{25} & -\frac{30}{25} \end{pmatrix}^2} = -\frac{511}{73} = -7$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 32 \end{pmatrix} = \frac{118}{25} v_1 - 7 v_2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 32 \end{pmatrix} = \frac{118}{25} x_1 - 7(x_2 - \frac{x_2 x_1}{x_1^2} x_1) = \frac{118}{25} x_1 - 7x_2 + 7\frac{x_2 x_1}{x_1^2} x_1 = \frac{118}{25} x_1 - 7x_2 + 7 \cdot \frac{1}{25} \cdot x_1 = 5x_1 - 7x_2$$

$\uparrow$הגענו לאותה תוצאה.