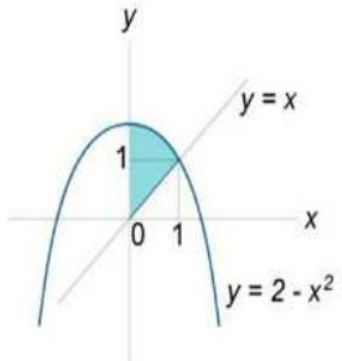
1.א.

האינטגרל הוא:

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}dy\right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+y}\right)_{y=1}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \left(\ln(x+1) - \ln(x+2)\right)_{x=0}^{x=1} = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

ב. התחום הוא:



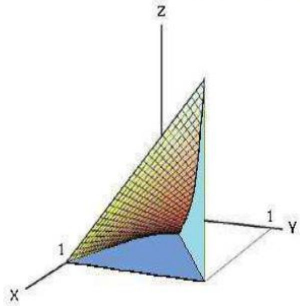

האינטגרל הוא:

$$\iint_D (x-y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{2-x^2} (x-y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)_{y=x}^{y=2-x^2} dx =$$

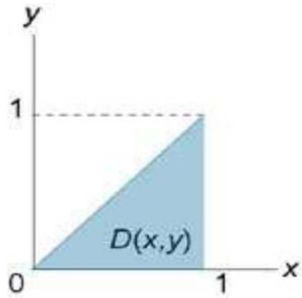
$$= \int_0^1 \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x - 2\right) dx = \left(-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + x^2 - 2x\right)_{x=0}^{x=1} = -\frac{17}{20}$$

ג.

התחום הוא:




ההטלה של התחום על מישור $xy$ נותנת את התחום:




האינטגרל הוא:

$$\iiint\limits_D xy^2z^3dxdydz = \int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^x \left( \int\limits_0^{xy} xy^2z^3dz \right) dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^x \left( \frac{xy^2z^4}{4} \right)_{z=0}^{z=xy} dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^x \frac{x^5y^6}{4} dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left( \frac{x^5y^7}{28} \right)_{y=0}^{y=x} dx = \int\limits_0^1 \frac{x^{12}}{28} dx = \left. \frac{x^{13}}{364} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{364}$$

.2

$$S = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_{-4}^{1} \left( \int\limits_{3y-4}^{-y^2} 1dx \right) dy = \int\limits_{-4}^{1} \left(-y^2 - 3y + 4\right) dy = \left( -\frac{y^3}{3} - \frac{3y^2}{2} + 4y \right)_{y=-4}^{y=1} = \frac{125}{6}$$

הנקודות $-1, 4$ הן נקודות החיתוך בין העקומות.

.3

אם כן, בסיס הפירמידה נח על המישור: $3x+6y+4z=12$, ולכן נוכל לכתוב:

$$0 \le z \le \frac{12-3x-6y}{4} = 3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y$$

כעת, ההטלה של הפירמידה על המישור $xy$ תיתן את התחום:

$$0 \le x \le 4-2y, 0 \le y \le 2$$

החלטתי לגוון קצת ולהביע את $x$ כפונקציה של $y$.

לפיכך, הנפח הוא:

$$V = \iiint\limits_G 1dxdydz = \int\limits_0^2 \left( \int\limits_0^{4-2y} \left( \int\limits_0^{3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}y} 1dz \right) dx \right) dy = \int\limits_0^2 \left( \int\limits_0^{4-2y} \left(3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y\right) dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(3x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}xy\right)_{x=0}^{x=4-2y} dy = \int\limits_0^2 \left(12 - 6y - \frac{48-48y+12y^2}{8} - \frac{12y-6y^2}{2}\right) dy =$$

$$= \left(12y - 3y^2 - 6y + 3y^2 - \frac{y^3}{2} - 3y^2 + y^3\right)_{y=0}^{y=2} = 4$$

4.א.

החלפת המשתנים:

$$u=x+y,v=\frac{y}{x^3}$$

נראית קלאסית. למה זו פונקציה חח"ע?

התחום שלנו יהיה $\frac{1}{2}\le u\le 1$, $4 \le v\le 1$. ל$-u,v$ כלשהם בתחום, $x,y$ שיתאימו להם צריכים לקיים:

$$y=vx^3\Longrightarrow u=x+vx^3$$

כמה $x$ פותרים את המשוואה הזו? אם נגזור את $u=x+vx^3$ נקבל:

$$u'=1+3vx^2>0$$

נסמן $u=x+y,v=x-y$. לכן:

$$x=\frac{u+v}{2},y=\frac{u-v}{2}$$

לכן:

$$|J|=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

אנו צריכים ערך מוחלט, ולכן $\frac{1}{2}$.

איך משתנה התחום? נקבל $1\le u\le 2,|v|\le u$.

לפיכך:

$$\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy=\int\limits_1^2\int\limits_{-u}^{u}e^{\frac{v}{u}}\cdot\frac{1}{2}dvdu=\int\limits_1^2\left(\frac{u}{2}e^{\frac{v}{u}}\right)_{v=-u}^{v=u}du=\int\limits_1^2\frac{u\left(e-\frac{1}{e}\right)}{2}du=\frac{3\left(e-\frac{1}{e}\right)}{4}$$

ב.

החלפת המשתנים:

$$u = x + y, v = \frac{y}{x^3}$$

נראית קלאסית. למה זו פונקציה חח"ע?

התחום שלנו יהיה $1 \leq u \leq \frac{1}{2}, 4 \leq v \leq 1$. ל$-u, v$ כלשהם בתחום, $x, y$ שיתאימו להם צריכים לקיים:

$$y = vx^3 \Longrightarrow u = x + vx^3$$

כמה $x$ פותרים את המשוואה הזו? אם נגזור את $u = x + vx^3$ נקבל:

$$u' = 1 + 3vx^2 > 0$$

כלומר לפונקציה $u(x)$ אין נקודות קיצון (לא בקצוות; היא עולה ממש בכל התחום) ולכן היא חותכת את $0$ רק במקום אחד, כלומר יש רק פתרון אחד למשוואה.

לכן לכל $u$ יש רק $x$ אחד מתאים. לכן, יש גם רק $y$ אחד מתאים כי $u = x + y$.

נחשב את היעקוביאן:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3y}{x^4} & \frac{1}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{x+3y}{x^4}$$

ולכן: $\frac{x^4}{x+3y} = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$, לכן:

$$\iint\limits_D \frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}dxdy = \int\limits_1^4 \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 e^v dudv = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 e^v dv = \frac{e^4-e}{2}$$

ג.

נחליף את המשתנים:

$$u = x^2, v = \frac{y}{x}$$

מכיוון ש$-$ $x, y \geq 0$ קל לראות שההתאמה חח"ע; אם נבחר $u, v$ כלשהם נקבל $x = \sqrt{u}, y = vx$.

נחשב את היעקוביאן:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2$$

ולכן: $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{1}{2}$.

איך משתנה התחום?

$$0 \leq x \leq 2, u = x^2 \Longrightarrow 0 \leq u \leq 4$$

$$0 \leq y \leq x \Longrightarrow 0 \leq \frac{y}{x} = v \leq 1$$

לפיכך:

$$\iint\limits_D \frac{2x^2e^{x^2}}{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_D \frac{2e^{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^4 \frac{2e^u}{1+v^2}\cdot\frac{1}{2}dudv = \int\limits_0^1 \left.\frac{e^u}{1+v^2}\right|_{u=0}^{u=4} dv$$

$$= \int_0^1 \frac{e^4-1}{1+v^2} dv = \left(e^4-1\right) \arctan v|_{v=0}^{v=1} = \frac{\pi\left(e^4-1\right)}{4}$$

ד.

ה־$2z$ קצת הורס לקואורדינטות כדוריות, אז ננסה גליליות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

לכן התחום שלנו הוא $r^2+z^2 \leq 3, r^2 \leq 2z$ כלומר: $r \leq \sqrt{3-z^2}, r \leq \sqrt{2z}$.

מתי התחומים האלו נחתכים? $\sqrt{2z} = \sqrt{3-z^2}$, כלומר:

$$2z = 3 - z^2 \Longrightarrow z = 1, z = -3$$

מכיוון ש: $x^2+y^2 \leq 2z$ נקבל: $z \geq 0$ ולכן $z=1$ הוא המתאים.

מצד שני, התנאי $x^2+y^2+z^2 \leq 3$ נותן לנו $z \leq \sqrt{3}$.

כלומר, בתחום $0 \leq z \leq 1$ התחום המתאים ל־$r$ הוא $0 \leq r \leq \sqrt{2z}$.

בתחום $1 \leq z \leq \sqrt{3}$ התחום המתאים ל־$r$ הוא $0 \leq r \leq \sqrt{3-z^2}$.

נתבונן על האינטגרל:

$$\iiint_D (x+y+z)^2 \, dxdydz = \iiint_D \left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\right) dxdydz$$

הביטויים $xy, xz$ אי־זוגיים ביחס ל־$x$ והתחום סימטרי ביחס ל־$x$ ולכן האינטגרל שלהם מתאפס.

באופן דומה, הביטוי $yz$ אי־זוגי ביחס ל־$y$ והתחום סימטרי ביחס ל־$y$ ולכן האינטגרל שלו מתאפס. לכן:

$$\iiint\limits_D (x+y+z)^2\,dxdydz = \iiint\limits_D \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

נפצל לשני אינטגרלים, בהתאם לתחומים של $z$ בהם התחומים של $r$ שונים.

היעקוביאן הוא $r$, ו־$0\le\theta\le 2\pi$ בנוהל. ולכן:

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{2z}} \int\limits_0^{2\pi} \left(r^2+z^2\right) r d\theta drdz + \int\limits_1^{\sqrt{3}} \int\limits_0^{\sqrt{3-z^2}} \int\limits_0^{2\pi} \left(r^2+z^2\right) r d\theta drdz$$

נחשב כל אחד בנפרד:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{2z}} \int\limits_0^{2\pi} \left(r^2+z^2\right) r d\theta drdz = 2\pi\cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{2z}} \left(r^2+z^2\right) rdrdz = 2\pi\cdot \int\limits_0^1 \left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2z^2}{2}\right)_{r=0}^{r=\sqrt{2z}} dz$$

$$= 2\pi\cdot\int\limits_0^1 \left(z^2+z^3\right)dz = 2\pi\cdot\left(\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-z^2}}\int_0^{2\pi}\left(r^2+z^2\right)rd\theta drdz=2\pi\cdot\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2z^2}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{3-z^2}}dz$$

$$=2\pi\cdot\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{\left(3-z^2\right)^2}{4}-\frac{\left(3-z^2\right)z^2}{2}\right)dz=2\pi\cdot\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{9-z^4}{4}\right)dz=\frac{\pi}{2}\cdot\left(9z-\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_{z=1}^{z=\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(9\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{5}-9+\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi\left(36\sqrt{3}-44\right)}{10}$$

ובסה"כ:

$$\iiint_D\left(x+y+z\right)^2dxdydz=\pi\cdot\left(\frac{\left(36\sqrt{3}-44\right)}{10}+\frac{7}{12}\right)$$

ה.

נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$x=r\cos\phi\sin\theta, y=r\sin\phi\sin\theta, z=r\cos\theta$$

איך נראה התחום כעת?

$$z\geq 0\Longrightarrow 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

$$x\geq 0, y\geq 0, y\geq x\Longrightarrow r\sin\phi\sin\theta\geq r\cos\phi\sin\theta\Longrightarrow\sin\phi\geq\cos\phi$$

ומכיוון שאנו בתומן הראשון, $\frac{\pi}{4}\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}$. כמו כן, $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ ולכן

$.0 \leq r \leq R$

היעקוביאן הוא $r^2 \sin\theta$ ולכן:

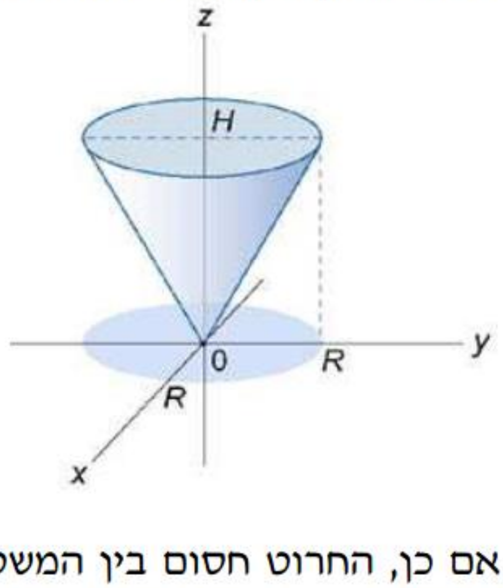
$$\iiint\limits_D (yz + zx)\,dxdydz = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^R \left(r^2 \cos\theta \sin\theta \cdot (\cos\phi + \sin\phi)\right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^2\theta \cdot (\cos\phi + \sin\phi) \cdot \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} d\theta d\phi$$

$$= \frac{R^5}{15} \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\phi + \sin\phi)\,d\phi = \frac{R^5}{15} \cdot (\sin\phi - \cos\phi)\Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\phi=\frac{\pi}{2}} = \frac{R^5}{15}$$

5.א.

נשים את קודקודו של החרוט בראשית הצירים, כך:




אם כן, החרוט חסום בין המשטחים $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = H$.

אם נעבור לקואורדינטות גליליות, נקבל:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R \Longrightarrow \frac{Hr}{R} \leq z \leq H$$

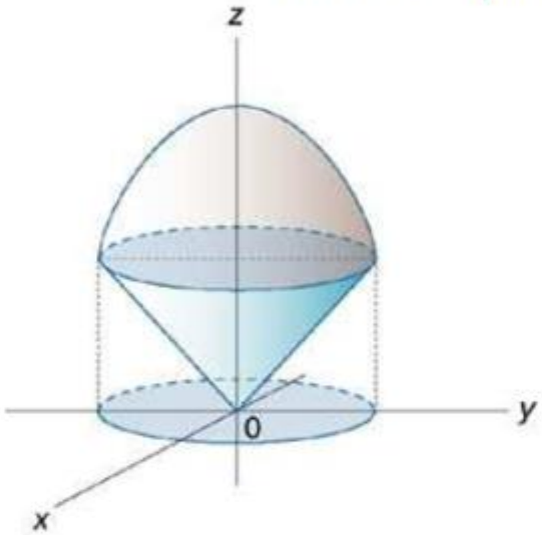
היעקוביאן הוא $r$ ולכן:

$$V = \iiint_D 1dxdydz = \int_0^R \int_r^H \int_0^{2\pi} rd\theta dzdr = 2\pi \cdot \int_0^R (z)|_{z=\frac{Hr}{R}}^{z=H} rdr = 2\pi \cdot \int_0^R \left(Hr - \frac{Hr^2}{R}\right) dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{Hr^2}{2} - \frac{Hr^3}{3R}\right)\Big|_{r=0}^{R} = 2\pi \cdot \left(\frac{HR^2}{2} - \frac{Hr^2}{3}\right) = \frac{\pi HR^2}{3}$$

ב.

הגוף שלנו הוא:

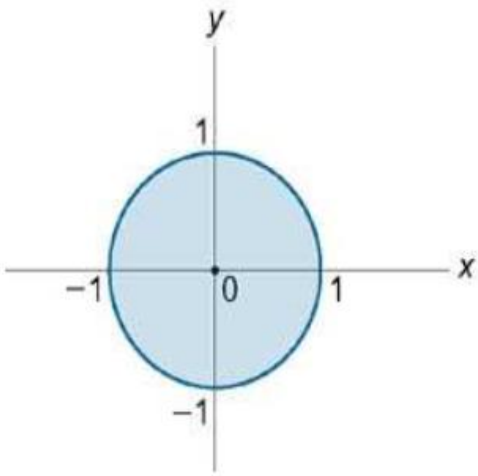



נחפש את רדיוס מעגל החיתוך בין הפרבולואיד והחרוט:

$$r = 2 - r^2 \Longrightarrow r = -2, 1$$

כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2}$, ובתחום שלנו בוודאי $r=1$.

ההטלה על מישור $xy$ נותנת:




אם נעבור לקואורדינטות גליליות, נקבל: $r \leq z \leq 2-r^2$ ובנוסף:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$$

היעקוביאן הוא $r$ ולכן:

$$V=\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^{2-r^2} r dz d\theta dr = 2\pi \cdot \int_0^1 r\ (z)\Big|_{z=r}^{z=2-r^2} dr = 2\pi \cdot \int_0^1 \left(2r-r^3-r^2\right) dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} = \frac{5\pi}{6}$$

.6

נתבונן בפונקציה $x^y$ במלבן $[0,1]\times[a,b]$:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = \int_0^1 \frac{1}{\ln x}\cdot x^y\Big|_{y=a}^{y=b} dx = \int_0^1 \int_a^b x^y\,dydx =$$

נחליף את סדר האינטגרציה:

$$= \int_a^b \int_0^1 x^y\,dxdy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}dy = \ln(b+1) - \ln(a+1)$$

ולכן:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$