מבוא לחשבון אינפיניטסימלי 2 - פתרון תרגיל 1

1. אינטגרלים מיידיים

א. $$\int \frac{x^2-3x+2}{x-3}dx = \int \frac{x(x-3)}{x-3}dx + \int \frac{2}{x-3}dx =$$

$$= \int x\,dx + \int \frac{2}{x-3}dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + 2\ln|x-3| + C}$$

ב. נעזר בנוסחת הזהות הטריגונומטרית:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\int \cos 3x\cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(3x-7x)+\cos(3x+7x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int\cos(-4x)dx + \frac{1}{2}\int\cos 10x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(-4x)}{-4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 10x}{10} + C =$$

נעזר בנוסחת הזהות $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$$= \boxed{\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 10x}{20} + C}$$

ג. $$\int\left(\sqrt[7]{x^5}+2\right)^2 dx = \int\left(x^{\frac{5}{7}}+2\right)^2 dx = \int\left(x^{\frac{10}{7}} + 4x^{\frac{5}{7}} + 4\right)dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{17}{7}}}{\frac{17}{7}} + 4\cdot\frac{x^{\frac{12}{7}}}{\frac{12}{7}} + 4x + C = \boxed{\frac{7}{17}\sqrt[7]{x^{17}} + \frac{7}{3}\sqrt[7]{x^{12}} + 4x + C}$$

ד. $$\int \frac{7}{\sqrt[5]{3x+2}}dx = \int 7\cdot(3x+2)^{-\frac{1}{5}}dx = 7\cdot\frac{(3x+2)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}\cdot 3} + C =$$

$$= \boxed{\frac{35}{12}\cdot\sqrt[5]{(3x+2)^4} + C}$$

ג. $\int \frac{16^x - 3^{2x}}{4^x - 3^x}\,dx = \int \frac{(4^x - 3^x)(4^x + 3^x)}{4^x - 3^x}\,dx = \int (4^x + 3^x)\,dx = \boxed{\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{3^x}{\ln 3} + C}$

2. שיטת ההצבה

ך. $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

נניח $\cos x = t$

$\Leftarrow -\sin x\,dx = dt$

$\rightarrow \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C$

נציב מהצבה ונקבל

$\boxed{-\ln|\cos x| + C}$

ר. $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx =$

נניח $\ln x = t$

$\Leftarrow \frac{1}{x}\,dx = dt$

$\Rightarrow \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C$

נציב מהצבה

$\boxed{\ln|\ln x| + C}$

ד. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}\,dx$

נניח $1 - \sqrt{x} = t$

$\Leftarrow -\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt$

$= \int \frac{-2\,dt}{t} = -2\ln|t| + C$

נציב מהצבה ונקבל

$\boxed{-2\ln|1-\sqrt{x}| + C}$

3. אינטגרציה בחלקים

א. $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx =$

$u = \ln x \qquad v = x$

$u' = \frac{1}{x} \qquad v' = 1$

$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \boxed{x\ln x - x + C}$

ב. $\int \ln(x^2+1) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x^2+1) \, dx =$

$u = \ln(x^2+1) \qquad v = x$

$u' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \qquad v' = 1$

$= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1} \, dx =$

$= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2+2-2}{x^2+1} \, dx = x\ln(x^2+1) - \int 2 \, dx + \int \frac{2}{x^2+1} \, dx =$

$= \boxed{x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C}$

ג. $\int \arcsin x \, dx =$

$u = \arcsin x \qquad v = x$

$u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v' = 1$

$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$

נעזר בהצבה

$1-x^2 = t$

$-2x\,dx = dt$

$= x\arcsin x + \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = x\arcsin x + \sqrt{t} + C$

נחזור מהצבה:

$\boxed{x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$

ד. $\int e^x \cos x\, dx =$ $\quad u=\cos x \quad v=e^x$ ד
$\quad u'=-\sin x \quad v'=e^x$

$= e^x\cos x + \int e^x \sin x\, dx =$ $\quad u=\sin x \quad v=e^x$
$\quad u'=\cos x \quad v'=e^x$

ד פעם נוספת אינט' בחלקים

$= e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$

בסה"כ קיבלנו:

$$\int e^x\cos x\, dx = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\, dx$$

נעביר אגף, נחלק ונוסיף קבוע אינטגרציה

$$\int e^x\cos x\, dx = \boxed{\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x) + C}$$

ה. $\int \sin x\cos x\, dx =$ $\quad u=\sin x \quad v=\sin x$ ד
$\quad u'=\cos x \quad v'=\cos x$

$= \sin^2 x - \int \sin x\cos x\, dx$

באותה דרך מסעיף ד'

$$\int \sin x\cos x = \boxed{\frac{1}{2}\sin^2 x + C}$$

הערה: אפשרות לפתרון ללא אינט' בחלקים:

$$\int \sin x\cos x\, dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{2} + C$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4}\cos 2x + C}$$

שימו לב [illegible]

1. $\int x \sin x \, dx =$ $\quad u = x \quad v = -\cos x$

$\quad\quad u' = 1 \quad v' = \sin x$

$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = \boxed{-x\cos x + \sin x + C}$