

פתרון בוחן 88-132 תשע"ח (תיכוניסטים)

שאלה 1 (33 נק')

א. (23 נק') יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות המתכנסות לגבול $L \in \mathbb{R}$ ותהי $\{c_n\}$ סדרה המקיימת $a_n \leq c_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
הוכיחו כי $\{c_n\}$ מתכנסת ל- L .

יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|c_n - L| < \epsilon$ כלומר $-\epsilon < c_n - L < \epsilon$ כלומר $L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$.

מהתכנסות $\{a_n\}$ מקבלים כי יש $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$ כלומר $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$.
מהתכנסות $\{b_n\}$ מקבלים כי יש $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_2$ מתקיים $|b_n - L| < \epsilon$ כלומר $L - \epsilon < b_n < L + \epsilon$.
לכן לכל $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ מתקיים $L - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \epsilon$, מש"ל.

ב. (10 נק') הוכיחו כי הסדרה הבאה מתכנסת וחשבו את גבולה: $a_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \dots + 100^n}$

מתקיים: $a_n \leq \sqrt[n]{100^n + 100^n + \dots + 100^n} = \sqrt[n]{100 \cdot 100^n} = 100 \sqrt[n]{100} \rightarrow 100 \cdot 1 = 100$
כמו כן: $a_n \geq \sqrt[n]{100^n} = 100 \rightarrow 100$
לכן לפי משפט הסנדוויץ (סעיף א') מתקיים $a_n \rightarrow 100$.

שאלה 2 (34 נק')

א. (14 נק') הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ מתכנס עבור $s > 1$ ומתבדר עבור $s \leq 1$.

אם $s \leq 0$ האיבר הכללי של הטור לא שואף לאפס לכן הטור מתבדר. אחרת, $a_n = \frac{1}{n^s}$ סדרה חיובית היורדת מונוטונית לאפס, לכן לפי משפט העיבוי הטור מתכנס ומתבדר יחדיו עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. אך: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-s})^n$ וזהו טור הגדסי, אשר מתכנס כאשר $2^{1-s} < 1$ ומתבדר כאשר $2^{1-s} \geq 1$, כלומר מתכנס כאשר $1 - s < 0$ ומתבדר כאשר $1 - s \geq 0$, כלומר מתכנס כאשר $s > 1$ ומתבדר כאשר $s \leq 1$.

ב. (20 נק') מיצאו את כל $c \in \mathbb{R}$ עבורם הטור הבא מתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^c}{(3n)!}$

הטור חיובי, לכן נוכל להשתמש במבחן דלאמבר (מבחן המנה):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^c}{(3(n+1))!}}{\frac{(n!)^c}{(3n)!}} = \frac{((n+1)!)^c (3n)!}{(3(n+1))! (n!)^c} = \frac{(n+1)^c}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

עבור $c < 3$ נקבל כי הגבול הוא $0 < 1$, עבור $c = 3$ הגבול הוא $\frac{1}{9} < 1$, ועבור $c > 3$ הגבול הוא > 1 .

כלומר, הטור המקורי מתכנס עבור $c \leq 3$, ומתבדר עבור $c > 3$.

שאלה 3 (33 נק')

קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי, או מתבדרים (11 נק' לכל סעיף):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n} \quad \text{א.}$$

נבדוק התכנסות בהחלט: הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ הוא טור חיובי עם איבר כללי אשר שואף מונוטונית לאפס. לכן לפי מבחן

העיבוי הוא מתכנס ומתבדר יחדיו עם $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \log(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log 2}$ אשר מתבדר לפי מבחן השוואה שני עם הטור

ההרמוני. כלומר הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$ איננו מתכנס בהחלט.

מצד שני, כאמור $\frac{1}{n \log n}$ שואפת מונוטונית לאפס לכן לפי לייבניץ הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$ כן מתכנס בתנאי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[6]{n^2+n+1} + \sqrt[7]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^7-n^5+1}} \quad \text{ב.}$$

נבדוק התכנסות בהחלט:

לפי הסתכלות על חזקות גבוהות רואים כי כדאי לבצע מבחן השוואה שני עם הטור $\sum \frac{1}{n^2}$. נקבל:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 (\sqrt[6]{n^2+n+1} + \sqrt[7]{n^2+1})}{\sqrt[3]{n^7-n^5+1}} = \frac{\frac{1}{n^{7/3}} n^2 (\sqrt[6]{n^2+n+1} + \sqrt[7]{n^2+1})}{\frac{1}{n^{7/3}} \sqrt[3]{n^7-n^5+1}} = \frac{\sqrt[6]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[7]{\frac{1}{n^{1/3}}+\frac{1}{n^{7/3}}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^7}}} \rightarrow 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[6]{n^2+n+1} + \sqrt[7]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^7-n^5+1}}$ מתכנס, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[6]{n^2+n+1} + \sqrt[7]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^7-n^5+1}}$ מתכנס גם הטור $\sum \frac{1}{n^2}$ - כיוון ש-
 מתכנס בהחלט.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} .ג.$
--

כיוון ש- $\sqrt[n]{n!} \geq 1$ נקבל כי $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \geq \frac{1}{n}$. לכן לפי מבחן השוואה ראשון עם הטור ההרמוני המתבדר נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ מתבדר.