פתרון תרגיל 4 אינפי 3 תשע"ו

24 בנובמבר 2015

1. נזכור ש־$x \in \lim A$ אם לכל $r > 0$ קיים $a \in A$ שונה מ־x כך ש־$a \in B(x,r)$.

   (א) נפריך:

   $$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) | n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ \left(-\frac{1}{n}, 0 \right) | n \in \mathbb{N} \right\}$$

   ואז $\lim A = \lim B = \{(0,0)\}$ ולכן $\lim(A) \cap \lim B = \{(0,0)\}$.

   מצד שני, $A \cap B = \emptyset$ ולכן $\lim(A \cap B) = \emptyset$.

   (ב) נוכיח.

   יהי $x \in \lim A \cup \lim B$. בה"כ, $x \in \lim A$.

   לכן, לכל $r > 0$ קיים $a \in A \subseteq A \cup B$ שונה מ־x כך ש־$a \in B(x,r)$, ולכן $x \in \lim(A \cup B)$.

   לצד שני, יהי $x \in \lim(A \cup B)$. נניח בשלילה ש־$x \notin \lim A, \lim B$.

   לכן, קיימים $r_A, r_B > 0$ כך שלכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ שונים מ־x מתקיים:

   $$a \notin B(x, r_A), b \notin B(x, r_B)$$

   נסמן $r = \min\{r_A, r_B\}$. מכיוון ש־$x \in \lim(A \cup B)$, קיים $a \in A \cup B$ שונה מ־x כך ש־$c \in B(x,r)$.

   בה"כ, $c \in A$ ואז $c \in B(x,r) \subseteq B(x,r_A)$ וסתירה! לכן $x \in \lim A \cup \lim B$.

   בעזרת הכלה דו־כיוונית הוכחנו את הדרוש.

(ג) נפריך:

$$A=\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\},B=[0,1]$$

ואז $\lim A\times\lim B=\{0\}\times[0,1]$ אך $\lim(A\times B)=((A\cup\{0\})\times B)$.

(ד) נפריך:

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<6\right\},A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 6\right\}$$

ואז $\lim(A\backslash B)=A\backslash B$ אך $\lim A\backslash\lim B=\emptyset$.

2. נראה שסדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

(א) תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במרחב.

לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $m,n>n_0$ מתקיים:

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

לכן, לכל $x_0\in[a,b]$ מתקיים: $|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\varepsilon$. אי לכך, הסדרה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ב$-\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ מרחב שלם ולכן הסדרה מתכנסת. נסמן את גבול הסדרה ב$-f(x_0)$.

סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל$-f$. נראה שזו התכנסות בנורמה.

לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $m,n>n_0$ מתקיים $\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ וגם קיים $n_{x_0}>n_0$ עבורו $\left|f_{n_{x_0}}(x_0)-f(x_0)\right|<\varepsilon$. בפרט:

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|\leq\left|f_n(x_0)-f_{n_{x_0}}(x_0)\right|+\left|f_{n_{x_0}}(x_0)-f(x_0)\right|<2\varepsilon$$

ובפרט $\|f_n-f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<2\varepsilon$ לכל $n>n_0$ ולכן הסדרה אכן מתכנסת.

(ב) סדרה במרחב זה היא סדרה של סדרות, ולכן יש לנו שני אינדקסים. נסמן אחד למעלה ואחד למטה, ולא נתבלבל עם מעריך של חזקה.

תהי $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$סדרת קושי. לכן, לכל m קבוע הסדרה $\{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת

קושי ב־$\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ מרחב שלם ולכן הסדרה מתכנסת. נסמן את גבול הסדרה ב־x_m.

נתבונן בסדרה $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. ואז:

$$\sum |x_m|^2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum |x_m^n|^2 \leq \sup \|\{x_m^n\}_m\|_2^2 < M < \infty$$

עבור $M > 0$ כלשהו, מכיוון שסדרת קושי היא סדרה חסומה. מכאן $\sum |x_m|^2 <$ ∞ ולכן $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \in l_2$.

לפי ההגדרה:

$$\left\| \{x_m^l\}_{n=1}^{\infty} - \{x_m^n\}_{n=1}^{\infty} \right\|_2 = \sqrt{\sum |x_m^l|^2 - \sum |x_m^n|^2} < \varepsilon$$

עבור n, l גדולים מספיק. נשאיף $l \longrightarrow \infty$ ונקבל:

$$\|\{x_m\}_{n=1}^{\infty} - \{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}\|_2 = \sqrt{\sum |x_m|^2 - \sum |x_m^n|^2} \leq \varepsilon$$

ולכן הסדרה $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לסדרה $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. לכן המרחב שלם.

3. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי.

(א) נניח שקיימת סדרת מספרים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ששואפת לאינסוף ו־$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־x.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

כמו כן, קיים k עבורו $n_k > n_0$ ו־$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, מהתכנסות תת־הסדרה.

לכן, לכל $n > n_0$:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < 2\varepsilon$$

ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־x.

(ב) במרחב קומפקטי, לכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת ובפרט לכל סדרת קושי יש תת־סדרה מתכנסת. לפי הסעיף הקודם פירוש הדבר שכל סדרת קושי היא בעצמה סדרה מתכנסת, ולכן המרחב שלם.

4. נניח שהמרחב לא שלם. לכן, קיימת סדרת קושי לא מתכנסת, $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. נגדיר: $F_n = \{x_m\}_{m=n}^{\infty}$, זנב הסדרה החל מהאיבר ה־n.

למה אלו קבוצות סגורות? אלו סדרות קושי לא מתכנסות. סדרה כזו היא קבוצה סגורה, מכיוון שאם הייתה לה נקודת הצטברות אז היא הייתה גבול חלקי של הסדרה ולפי השאלה הקודמת זה היה הגבול של הסדרה עצמה והסדרה הייתה מתכנסת וסתירה! לכן אין נקודות הצטברות והקבוצה סגורה (שהרי היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה).

מכיוון שהסדרה היא סדרת קושי, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n, m > n_0$ מתקיים $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. כלומר, כל שני איברים ב$-F_{n_0}$ קרובים אחד לשני עד כדי ε ולכן $\delta(F_{n_0}) \leq \varepsilon$. בפרט, $\delta(F_{n_0}) \longrightarrow 0$, אך $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_m\}_{m=n}^{\infty} = \emptyset$.

לצד השני, אם המרחב שלם, נבחר סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש$-x_n \in F_n$. לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 עבורו $\delta(F_{n_0}) < \varepsilon$ ובפרט לכל $m, n > n_0$ מתקיים $x_n, x_m \in F_{n_0}$ ולכן:

$$d(x_n, x_m) \leq \delta(F_{n_0}) < \varepsilon$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ולכן מתכנסת לגבול x, כי המרחב שלם. בנוסף, לכל n מתקיים: $\{x_m\}_{m=n}^{\infty} \subseteq F_n$ ולכן הגבול x שייך ל$-F_n$.

לכן, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ואם כך $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

5. הנורמה האוקלידית מוגדרת על ידי:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

והיא רציפה כסכום והרכבת רציפות.

6. נבדוק את רציפות הפונקציות.

(א) הנורמה האוקלידית היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $d_{max}(x, a) < \delta$ אזי $|x - a_1| < \varepsilon$, כאשר $x = (x_1, ..., x_n), a = (a_1, ..., a_n)$.

מתקיים:

$$|x_1 - a_1| < \underset{1 \leq i \leq n}{max} \{|x_i - a_i|\} = d_{max}(x, a)$$

יהי $\varepsilon > 0$, נבחר $\delta = \varepsilon$ ואז אם $d_{max}(x,a) < \delta$ אזי $|x_1 - a_1| < \delta = \varepsilon$.

באופן כללי, ההטלה על כל רכיב היא רציפה.

(ב) לכל $(x,y) \neq (0,0)$ הפונקציה רציפה כמנת רציפות.

נבדוק האם הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ שווה ל-0.

במסלול $x = y$, נקבל:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2 + x^3 + x^3}{x^2 + x^2} = \lim_{x\longrightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2}$$

לכן הגבול שונה מ-0 (אין אפילו צורך לבדוק אם הוא אכן קיים) ולכן הפונקציה אינה רציפה.

(ג) בתחום הגדרתה (מהו תחום הגדרתה של הפונקציה?), הפונקציה רציפה כמנת רציפות. היכן שהפונקציה אינה מוגדרת היא בוודאי אינה רציפה.

נבדוק האם הגבול $\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y)$ שווה ל-0.

נציב $t = xy - 2$ ונקבל את הגבול:

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\arcsin t}{\arctan 3t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{3}{1+(3t)^2}} = \frac{1}{3}$$

לפי כלל לופיטל. לכן, הפונקציה אינה רציפה בנקודה $(2,1)$.