פתרון תרגיל 5 אינפי 3 תשע"ו

1 בדצמבר 2015

1. נחפש קבוצות מתאימות ונשתמש בתמונה הפוכה.

(א) הפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x,y)=\sin x+xy$ היא רציפה.
לכן, מכיוון ש־ $A=f^{-1}((-\infty,5])$ ו־ $(-\infty,5]\subseteq\mathbb{R}$ סגורה, גם A סגורה.

(ב) נזכור שמטריצה היא הפיכה אם ורק אם דטרמיננטתה (למה לא) שונה מאפס.
הפונקציה $\det:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ רציפה (היא הרי פולינום) .
לכן, מכיוון ש־ $GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ו־ $\mathbb{R}\setminus\{0\}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה, גם $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה.

2. נשתמש בהגדרת רציפות באמצעות קבוצות פתוחות.

(א) הפרכה. ניקח $X=Y=\mathbb{R}$, את המטריקה d_1 להיות המטריקה הדיסקרטית ואת שאר המטריקות d_2,ρ_1,ρ_2 להיות המטריקה הסטנדרטית.
נקבל שכל פונקציה $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ היא רציפה כי כל קבוצה ב־ (X,d_1) היא פתוחה (זו המטריקה הדיסקרטית), אך בוודאי שניתן למצוא פונקציה $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ שאינה רציפה, למשל:

$$f(x)=\begin{cases} x & x>1\\ -7 & x\leq 1\end{cases}$$

(ב) הוכחה. אם f רציפה אז $f^{-1}(O)$ פתוחה ב־X לכל O פתוחה ב־Y. כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה ולכן לכל כדור פתוח O, $f^{-1}(O)$ פתוחה.

לצד השני, לכל כדור פתוח $O \subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ פתוחה ב$-X$. תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. לכל $x \in U$ קיים $r_x > 0$ עבורו $B(x, r_x) \subseteq U$.

לכן: $U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$, ולכן:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{x \in U} B(x, r_x)\right) = \bigcup_{x \in U} f^{-1}(B(x, r_x))$$

וזהו איחוד של קבוצות פתוחות ולכן קבוצה פתוחה. תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה ולכן הפונקציה רציפה.

*הראו שתמונה הפוכה של איחוד אכן שווה לאיחוד התמונות ההפוכות.

(ג) הפרכה. ניקח $X = Y = \mathbb{R}$, d המטריקה הסטנדרטית ו$-\rho$ המטריקה הדיסקרטית.

תהי $f = Id$ פונקציית הזהות. הפונקציה אינה רציפה, שכן $\{5\}$ פתוחה ב$-(Y, \rho)$ אך $f^{-1}(\{5\}) = \{5\}$ לא פתוחה במטריקה הסטנדרטית.

מצד שני, במטריקה הדיסקרטית כדור סגור ברדיוס 1 הוא המרחב כולו וכדור סגור עם רדיוס קטן מ-1 הוא נקודון מהצורה $\{x\}$.

כעת, גם עבור המרחב כולו: $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ וגם עבור נקודון $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ נקבל שהקבוצה אכן סגורה ב$-(X, d)$, אך כמו שהסברנו הפונקציה אינה רציפה.

3. נשתמש בהגדרת רציפות עם אפסילון ודלתא.

(א) יהי $x \in X$, ויהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \varepsilon$, ואז אם $d(x, y) < \delta$ נקבל:

$$|f_a(x) - f_a(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y) < \delta = \varepsilon$$

לפי אי שוויון המשולש, ולכן הפונקציה רציפה.

(ב) מתקיים:

$$B[a, r] = \{x \in X : 0 \leq d(x, a) \leq r\} = \{x \in X : 0 \leq f_a(x) \leq r\} = f_a^{-1}([0, r])$$

הקטע $[0, r] \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה סגורה והפונקציה f_a רציפה ולכן גם $B[0, r]$ קבוצה סגורה.

4. נראה שהפונקציות אינן רציפות במ"ש, על ידי כך שנצביע על סדרות איברים שההפרשים ביניהם שואפים לאפס אך ההפרשים בין התמונות שלהם לא שואפים לאפס.

(א) לכל $\varepsilon < 1$ נתבונן בסדרות המספרים:

$$x_n = \sqrt{\pi n + \frac{\pi}{2}}, y_n = \sqrt{\pi n}$$

מתקיים:

$$|x_n - y_n| = \left|\sqrt{\pi n + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{\pi n}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\pi n + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{\pi n}} \longrightarrow 0$$

כאשר $n \longrightarrow \infty$ (כפלנו וחילקנו בצמוד), ולכן לכל $\delta > 0$ קיים n_δ כך שלכל $n > n_\delta$ מתקיים: $|x_n - y_n| < \delta$, אך:

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi n)\right| = 1 > \varepsilon$$

ולכן הפונקציה אינה רציפה במ"ש.

(ב) שוב, נתבונן בסדרות:

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), y_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$$

מתקיים:

$$|x_n - y_n| = \left|\left(0, \frac{2}{n}\right)\right| = \frac{2}{n} \longrightarrow 0$$

כאשר $n \longrightarrow \infty$, אך:

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \sqrt{(\arcsin 1 - \arcsin(-1))^2} = \pi$$

ולכן אין רציפות במ"ש.

5. נבדוק האם רציפות מתקיימת.

(א) לא בהכרח. נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\frac{x+y}{x-y}\right| & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

אם מקבעים את x או את y הפונקציה אכן רציפה לפי המשתנה השני:

$$\lim_{x\to 0} f\left(x,0\right)=\left|\frac{x}{x}\right|=1, \lim_{y\to 0} f\left(0,y\right)=\left|\frac{y}{-y}\right|=1$$

אבל לכל k נקבל במסלולים $y=kx$ גבולות שונים ולכן הפונקציה אינה רציפה.

(ב) לא בהכרח. נתבונן בתחום $D=\left[-1,1\right]^2$ ובפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\left|\frac{y}{x}\right| & \left|y\right|\leq\left|x\right|,\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ \left|\frac{x}{y}\right| & \left|x\right|<\left|y\right|\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

הפונקציה שלנו רציפה לפי כל אחד מהמשתנים בנפרד (ומכיוון שזהו תחום סגור וחסום, היא גם רציפה במ"ש). אלא שאם נשאף לנקודה $\left(0,0\right)$ במסלול $x=0$ נקבל:

$$\underset{y\to 0}{lim} f\left(0,y\right)=0$$

ואם נשאף במסלול $y=x$ נקבל:

$$\underset{x\to 0}{lim} f\left(x,x\right)=1$$

כלומר הגבול לא קיים, ולכן הפונקציה אינה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$.

(ג) הוכחה. נראה שלכל $\left(x_0,y_0\right)\in D$ המקיימים $\left|\left(x,y\right)-\left(x_0,y_0\right)\right|<\delta$, מתקיים $\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|<\varepsilon$. ובכן:

$$\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|\leq\left|f\left(x,y\right)-f\left(x,y_0\right)\right|+\left|f\left(x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|\leq$$

$$\leq K\left|y-y_0\right|+\left|f\left(x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|$$

f רציפה לפי x כלומר אם $\left|x-x_0\right|<\delta'$ אז לכל y, $\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y\right)\right|<\varepsilon'$. נבחר $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}$ ונבחר:

$$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2K},\delta'\right\}$$

ואם נחזור לאי־השוויון נקבל:

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ולכן הפונקציה רציפה.