# פתרון תרגיל 8 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

11 במאי 2016

1. וקטורי הנגזרות הם:

$$r_v = (\sinh v \cos\theta, \sinh v \sin\theta, \cosh v), r_\theta = (-\cosh v \sin\theta, \cosh v \cos\theta, 0)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = \langle r_v, r_v \rangle = \sinh^2 v \cos^2\theta + \sinh^2 v \sin^2\theta + \cosh^2 v = \cosh 2v$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_v, r_\theta \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle r_\theta, r_\theta \rangle = \cosh^2 v \sin^2\theta + \cosh^2 v \cos^2\theta = \cosh^2 v$$

ולכן המטריקה היא:

$$G = \begin{pmatrix} \cosh 2v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix}$$

נחשב את מקדמי כריסטופל.
אנחנו צריכים את:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh 2v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \begin{pmatrix} 2\sinh 2v & 0 \\ 0 & \sinh 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,1} & g_{12,1} \\ g_{21,1} & g_{22,1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,2} & g_{12,2} \\ g_{21,2} & g_{22,2} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} \left( g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left( g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2} \right) = \tanh 2v$$

$$\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2}\right)=0$$

$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=-\frac{1}{2}\tanh 2v$$

$$\Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=0$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2}\right)=\tanh v$$

$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=-\tanh v$$

המשוואות הגיאודזיות שלנו הן:

$$\begin{cases}(v)''+\Gamma_{ij}^{1}\left(v\right)'\left(\theta\right)'=0\\(\theta)''+\Gamma_{ij}^{2}\left(v\right)'\left(\theta\right)'=0\end{cases}$$

המעגל נמצא על מישור $z=0$ ורדיוסו 1, ולכן:

$$\left(\cosh v\cos\theta,\cosh v\sin\theta,\sinh v\right)=\left(x,y,0\right)$$

לכן $v=0$, והמעגל שלנו הוא:

$$\beta\left(s\right)=\left(\cos\theta\left(s\right),\sin\theta\left(s\right),0\right)$$

כעת, אנו יודעים שהקו הגיאודזי הוא בפרמטריזציה במהירות יחידה, כלומר:

$$1=\left\|\beta'\left(s\right)\right\|=\left\|\left(-\theta'\sin\theta,\theta\cos\theta,0\right)\right\|=\left|\theta'\right|$$

גזרנו לפי כלל השרשרת. אם כן, $\theta'=\pm1$ ולכן $\theta''=0$.
במצב הזה, בו $v=0$ ו-$0=\theta''$, אפשר לראות שהמשוואות הגיאודזיות אכן מתקיימות.

2. נבחר פרמטריזציות כלשהן (במידת הצורך).

(א) פרמטריזציה של הספירה היא:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(r\sin\theta\cos\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\theta\right)$$

באופן טריוויאלי לאחר חישוב קליל נקבל:

$$G=\begin{pmatrix}r^{2}&0\\0&r^{2}\sin^{2}\theta\end{pmatrix}$$

ומקדמי כריסטופל שלא מתאפסים הם:

$$\Gamma_{22}^{1}=-\sin\theta\cos\theta,\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\cot\theta$$

נסמן: $\gamma_1(t)=\theta(t),\gamma_2(t)=\phi(t)$ והמשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases}\theta''-\sin\theta\cos\theta\left(\phi'\right)^2=0\\ \phi''+2\cot\theta\theta'\phi'=0\end{cases}$$

המשוואה שנובעת מטבעיותה של הפרמטריזציה היא:

$$1=\begin{pmatrix}\theta' & \phi'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r^2 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta'\\ \phi'\end{pmatrix}$$

ולכן נוכל לכתוב:

$$\begin{cases}\theta''-\sin\theta\cos\theta\left(\phi'\right)^2=0\\ \phi''+2\cot\theta\theta'\phi'=0\\ r^2\left(\theta'\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\phi'\right)^2=1\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל:

$$\frac{\phi''}{\phi'}=-2\cot\theta\theta'$$

נבצע אינטגרציה $dt$ על שני האגפים ונקבל:

$$\ln\phi'=\int\frac{\phi''}{\phi'}dt=\int-2\cot\theta\theta' dt=-2\int\cot\theta d\theta=-2\ln\left(\sin\theta\right)+\ln C$$

כאשר משנים משתנה מ־$t$ ל־$\theta$, מקבלים $d\theta=\theta'(t)dt$. מכיוון שהאינטגרל אינו מסוים, הוספנו קבוע $\ln C$ (הוספנו בצורת $\ln$ לשם הנוחות).
אם כן, בעזרת חוקי לוגריתמים:

$$\phi'=\frac{C}{\sin^2\theta}$$

כעת, נציב את $\phi'$ במשוואה השלישית ונקבל:

$$r^2\left(\theta'\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{C}{\sin^2\theta}\right)^2=1$$

נבודד את $\theta'$ ונקבל:

$$\theta'=\frac{\sqrt{\sin^2\theta-r^2C^2}}{r\sin\theta}$$

נתבונן ב:

$$\frac{d\theta}{d\phi}=\frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}}=\frac{\theta'}{\phi'}=\frac{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta-r^2C^2}}{Cr}$$

ואם כן, $d\phi=\frac{Cr}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta-r^2C^2}}d\theta$. לכן, מצד אחד:

$$\int d\phi=\phi$$

ומצד שני:

$$\int d\phi=\int\frac{Cr}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta-r^2C^2}}d\theta=\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2C^2}{\sin^2\theta}}}\cdot\frac{Cr}{\sin^2\theta}d\theta=$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-r^2C^2+r^2C^2\cot^2\theta}}\cdot\frac{Cr}{\sin^2\theta}d\theta=\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2C^2\cot^2\theta}{1-r^2C^2}}}\cdot\frac{Cr}{\sqrt{1-r^2C^2}\cdot\sin^2\theta}d\theta$$

כעת, $(\cot\theta)'=-\frac{1}{\sin^2\theta}$. אם כן, נבצע החלפת משתנים:

$$p=\frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}\Longrightarrow dp=-\frac{Cr}{\sqrt{1-r^2C^2}\cdot\sin^2\theta}d\theta$$

ונקבל:

$$\phi=\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2C^2\cot^2\theta}{1-r^2C^2}}}\cdot\frac{Cr}{\sqrt{1-r^2C^2}\cdot\sin^2\theta}d\theta=-\int\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}dp$$

ולכן: $\phi=-\arcsin p-B=-\arcsin\left(\frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}\right)-B$. הוספנו קבוע $B$ כי האינטגרל אינו מסוים.

לפיכך, קו גיאודזי נראה כך:

$$\gamma=\left(\theta,-\arcsin\left(\frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}\right)-B\right)$$

איך נראית עקומה גיאודזית?

אנו יודעים שעקומה גיאודזית על הספירה היא קשת של מעגל גדול; כעת נראה זאת.

אנו יודעים ש: $\phi=-\arcsin\left(\frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}\right)-B$, ולכן:

$$\frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}=-\sin(\phi+B)$$

נשתמש בזהות ל- $\sin$ של סכום זוויות ונקבל:

$$\frac{Cr\cos\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}\cdot\sin\theta}=-\sin\phi\cos B-\cos\phi\sin B$$

נכפול ב־$\sin\theta$:

$$\frac{Cr\cos\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}=-\sin\phi\sin\theta\cos B-\cos\phi\sin\theta\sin B$$

נעבור מהקואורדינטות הספריות חזרה לקואורדינטות $(x,y,z)$:

$$(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\theta)$$

לכן: $-\sin\theta\cos\phi=-\frac{x}{r},-\sin\phi\sin\theta=-\frac{y}{r},r\cos\theta=z$.
נסמן: $A_3=\frac{C}{\sqrt{1-r^2C^2}},A_1=\frac{\sin B}{r},A_2=\frac{\cos B}{r}$ ונוכל לרשום:

$$A_3z=-A_1x-A_2y$$

וזוהי משוואת מישור שעובר בראשית הצירים.
העקומה הגיאודזית נמצאת גם על המישור (כי היא מקיימת את משוואתו) וגם על הספירה, ולכן היא חלק מחיתוך המישור והספירה.
אנו יודעים שחיתוך של מישור שעובר בראשית ושל ספירה הוא מעגל גדול, ולכן העקומה הגיאודזית היא אכן קשת מעגל גדול.

(ב) פרמטריזציה של הגליל היא למשל:

$$X(\theta,v)=(r\cos\theta,r\sin\theta,v)$$

המטריקה היא:

$$G=\begin{pmatrix} r^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

וכל מקדמי כריסטופל מתאפסים. לכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases}\theta''=0\\ v''=0\end{cases}$$

נאטגרץ פעמיים ונקבל:

$$\begin{cases}\theta=at+b\\ v=ct+d\end{cases}$$

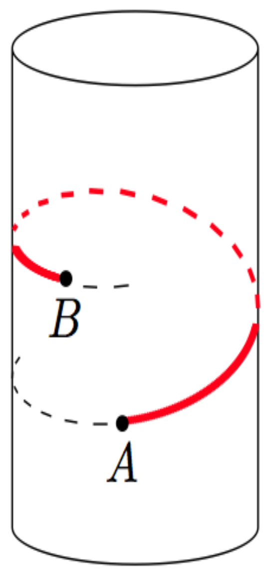
כלומר הקווים הגיאודזיים הם קווים ישרים:

$$\gamma(t)=(a,c)\,t+(b,d)$$

נציב בפרמטריזציה כדי לקבל את העקומות הגיאודזיות:

$$X\circ\gamma=(r\cos(at+b),r\sin(at+b),ct+d)$$

וזהו סליל לאורך הגליל.




(ג) לאחר חישוב נקבל:

$$G=\left(\begin{array}{cc} r^2v^2 & 0 \\ 0 & 1+r^2 \end{array}\right)$$

ומקדמי כריסטופל שאינם מתאפסים הם:

$$\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\frac{1}{v},\Gamma_{11}^{2}=-\frac{r^2}{1+r^2}v$$

לכן המשוואות הגיאודזיות יהיו:

$$\left\{\begin{array}{c} \theta''+\frac{2}{v}\theta'v'=0 \\ v''-\frac{r^2}{1+r^2}v\left(\theta'\right)^2=0 \end{array}\right.$$

כמו כן, נדרוש שהפרמטריזציה של העקומה הגיאודזית תהיה טבעית ונקבל:

$$1=\left(\gamma'\right)^t\cdot G\cdot\left(\gamma'\right)=r^2v^2\left(\theta'\right)^2+\left(1+r^2\right)\left(v'\right)^2$$

מהמשוואה הגיאודזית הראשונה נקבל:

$$\frac{\theta''}{\theta'}=-2\frac{v'}{v}$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים לפי $t$ ונקבל:

$$\ln\theta'=\int\frac{\theta''}{\theta'}dt=\int-2\frac{v'}{v}dt=-2\ln v+\ln C$$

הוספנו קבוע $\ln C$ כי האינטגרל לא מסוים. מחוקי הלוגריתמים נקבל:

$$\theta' = \frac{C}{v^2}$$

נציב במשוואה השלישית ונקבל:

$$1 = r^2 v^2 \left(\frac{C}{v^2}\right)^2 + \left(1 + r^2\right) \left(v'\right)^2$$

נבודד את $v'$ ונקבל:

$$\frac{dv}{dt} = v' = \frac{\sqrt{v^2 - r^2 C^2}}{v\sqrt{1 + r^2}} \Longrightarrow dt = \frac{v\sqrt{1 + r^2}}{\sqrt{v^2 - r^2 C^2}} dv$$

לכן:

$$t = \int dt = \int \frac{v\sqrt{1 + r^2}}{\sqrt{v^2 - r^2 C^2}} dv = \sqrt{(1 + r^2)(v^2 - r^2 C^2)} + B$$

הוספנו $B$ כי האינטגרל לא מסוים. נחלץ את $v$ ונקבל:

$$v = \sqrt{\frac{(t - B)^2}{1 + r^2} + r^2 C^2}$$

נציב את $v$ שמצאנו חזרה במשוואה של $\theta'$:

$$\theta' = \frac{C}{\left(\frac{(t-B)^2}{1+r^2} + r^2 C^2\right)} = \frac{1}{r^2 C} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)}$$

נאטגרץ ונקבל:

$$\theta = \int \frac{1}{r^2 C} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)} dt =$$

נחליף קלות את המשתנים:

$$p = \frac{t - B}{Cr\sqrt{1 + r^2}} \Longrightarrow dp = \frac{1}{Cr\sqrt{1 + r^2}}$$

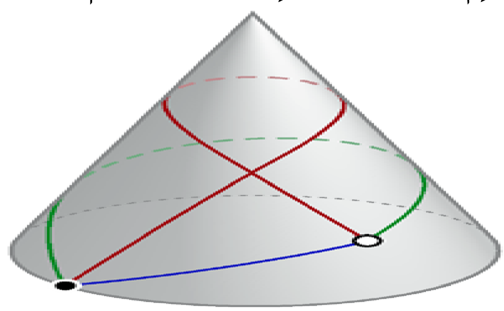
ונקבל:

$$\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} \cdot \int \frac{1}{1 + p^2} dp = \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} \arctan p + A = \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} \arctan\left(\frac{t - B}{Cr\sqrt{1 + r^2}}\right) + A$$

ובסך הכל, הנוסחה לקו גיאודזי של החרוט היא:

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} \arctan\left(\frac{t - B}{Cr\sqrt{1 + r^2}}\right) + A, \sqrt{\frac{(t - B)^2}{1 + r^2} + r^2 C^2}\right)$$

העקומות הגיאודזיות על החרוט נראות כך:



(ד) נניח שהפרמטריזציה של המשטח היא $X(u,v)$.

לאחר חישוב אפשר להיווכח שמקדמי כריסטופל שאינם מתאפסים הם:

$$\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\frac{1}{2v}.\Gamma_{11}^{2}=-\frac{1}{2v},\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2v}$$

ולכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} u''+\frac{1}{v}u'v'=0 \\ v''-\frac{1}{2v}\left(u'\right)^{2}+\frac{1}{2v}\left(v'\right)^{2}=0 \end{cases}$$

בנוסף, יש לנו את המשוואה שנובעת מכך שהפרמטריזציה היא טבעית:

$$1=\left(\gamma'\right)^{t}\cdot G\cdot\left(\gamma'\right)=v\left(u'\right)^{2}+v\left(v'\right)^{2}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$\frac{u''}{u'}=-\frac{v'}{v}$$

נבצע אינטגרציה לפי $t$ ונקבל:

$$\ln u=\int\frac{u''}{u'}dt=\int-\frac{v'}{v}dt=-\ln v+\ln C$$

כאשר $\ln C$ קבוע בנוהל. נקבל, אם כך:

$$u'=\frac{C}{v}$$

נציב זאת במשוואה השלישית:

$$1=v\left(\frac{C}{v}\right)^{2}+v\left(v'\right)^{2}$$

ולכן:

$$v'=\frac{\sqrt{v-C^{2}}}{v}$$

כעת, נתבונן ב:

$$\frac{du}{dv}=\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dv}{dt}}=\frac{u'}{v'}=\frac{\frac{C}{v}}{\frac{\sqrt{v-C^2}}{v}}=\frac{C}{\sqrt{v-C^2}}$$

לכן: $du=\frac{C}{\sqrt{v-C^2}}dv$. אם כן:

$$u=\int du=\int\frac{C}{\sqrt{v-C^2}}dv=2C\sqrt{v-C^2}+B$$

ולכן הקווים הגיאודזיים הם מהצורה:

$$\gamma\left(t\right)=\left(2C\sqrt{t-C^2}+B,t\right)$$

3. נמצא את המשוואות הגיאודזיות בעזרת מקדמי כריסטופל ונראה בכל סעיף האם הישרים עונים על הדרוש.

(א) מהגדרת המטריקה נקבל:

$$G^{-1}=\frac{1}{e^{x+y}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial y}=G$$

לפי הנוסחה נקבל:

$$\begin{gathered}\Gamma_{11}^{1}=\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{22}^{1}=-\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{11}^{2}=-\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{22}^{2}=-\tfrac{1}{2}\end{gathered}$$

(ב) המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases}x''+\frac{1}{2}\left(x'\right)^2-\frac{1}{2}\left(y'\right)^2+x'y'=0\\ y''-\frac{1}{2}\left(x'\right)^2+\frac{1}{2}\left(y'\right)^2+x'y'=0\end{cases}$$

נציב $y=x$ ונקבל:

$$x''+\frac{1}{2}\left(x'\right)^2-\frac{1}{2}\left(x'\right)^2+x'x'=0$$

כלומר $x''+\left(x'\right)^2=0$. נציב $z=x'$ ונקבל:

$$z'+z^2=0$$

קל לראות שהפתרון הוא מהצורה:

$$z = \frac{1}{t-C}$$

כאשר $C$ קבוע. למתקדמים: ברנולי. אם כך:

$$x' = \frac{1}{t-C} \Longrightarrow x = \ln|t-C| + B$$

כאשר $B$ קבוע. לכן הקו הגיאודזי הוא:

$$\gamma(t) = (\ln|t-C| + B, \ln|t-C| + B)$$

(ג) נציב $y=0$ במשוואות הגיאודזיות ונקבל:

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ \frac{1}{2}(x')^2 = 0 \end{cases}$$

לכן $x'=0$ ולכן $x=A$ כאשר $A$ קבוע. קיבלנו נקודה:

$$\gamma = (A, 0)$$

ולא עקומה ולכן זו לא עקומה גיאודזית.

(ד) נציב $x=1$ וכמו בסעיף הקודם נקבל שזו אינה עקומה גיאודזית.

4. נתבונן באופרטור הצורה. מצד אחד,

$$S = -d_{\vec{n}} = -J_{\vec{n}} = (-\vec{n}_1, -\vec{n}_2)$$

ומצד שני:

$$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11}L_{11} + g^{12}L_{21} & g^{11}L_{12} + g^{12}L_{22} \\ g^{21}L_{11} + g^{22}L_{21} & g^{21}L_{12} + g^{22}L_{22} \end{pmatrix}$$

נזכור שהדיפרנציאל הוא איזומורפיזם בין המישור המשיק לבין $\mathbb{R}^2$, שמתאים בין וקטור במישור המשיק לבין וקטור הקואורדינטות שלו לפי הבסיס $\{r_1, r_2\}$.
לכן:

$$-\vec{n}_j = \left(g^{11}L_{1j} + g^{12}L_{2j}\right) r_1 + \left(g^{21}L_{1j} + g^{22}L_{2j}\right) r_2 = g^{ik}L_{kj}r_i$$

ואכן $\vec{n}_j = -g^{ik}L_{kj}r_i$.

5. קצת עבודה שחורה. וקטורי הנגזרות הם:

$$r_t = (2\cos t\cos\theta, 2\cos t\sin\theta, -2\sin t)\,, r_\theta = (-2\sin t\sin\theta, 2\sin t\cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11} = \langle r_t, r_t\rangle = 4\cos^2 t\cos^2\theta + 4\cos^2 t\sin^2\theta + 4\sin^2 t = 4$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_t, r_\theta\rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle r_\theta, r_\theta\rangle = 4\sin^2 t\sin^2\theta + 4\sin^2 t\cos^2\theta = 4\sin^2 t$$

ולכן:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4\sin^2 t \end{pmatrix}$$

נחשב את איברי המטריצה $B$. וקטורי הנגזרות השניות:

$$r_{tt} = (-2\sin t\cos\theta, -2\sin t\sin\theta, -2\cos t)$$
$$r_{t\theta} = r_{\theta t} = (-2\cos t\sin\theta, 2\cos t\cos\theta, 0)$$
$$r_{\theta\theta} = (-2\sin t\cos\theta, -2\sin t\sin\theta, 0)$$

נחשב את הנורמל. המכפלה הוקטורית היא:

$$r_t \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\cos t\cos\theta & 2\cos t\sin\theta & -2\sin t \\ -2\sin t\sin\theta & 2\sin t\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(4\sin^2 t\cos\theta, 4\sin^2 t\sin\theta, 4\cos t\sin t\right)$$

אם כן:

$$\|r_t \times r_\theta\| = \sqrt{16\sin^4 t\cos^2\theta + 16\sin^4 t\sin^2\theta + 16\cos^2 t\sin^2 t} = 4\sin t$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{r_t \times r_\theta}{\|r_t \times r_\theta\|} = (\sin t\cos\theta, \sin t\sin\theta, \cos t)$$

כעת:

$$L_{11} = r_{tt}\cdot\vec{n} = -2\sin^2 t\cos^2\theta - 2\sin^2 t\sin^2\theta - 2\cos^2 t = -2$$
$$L_{21} = L_{12} = r_{t\theta}\cdot\vec{n} = 0$$
$$L_{22} = r_{\theta\theta}\cdot\vec{n} = -2\sin^2 t\cos^2\theta - 2\sin^2 t\sin^2\theta = -2\sin^2 t$$

ולכן:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את אופרטור הצורה:

$$S=G^{-1}B=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\sin^2 t\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\sin^2 t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ולכן $K=\frac{1}{4}$.

נחשב את מקדמי כריסטופל; אנו צריכים את:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4\sin^2 t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}\\g^{21}&g^{22}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\begin{pmatrix}0&0\\0&8\cos t\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11,1}&g_{12,1}\\g_{21,1}&g_{22,1}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11,2}&g_{12,2}\\g_{21,2}&g_{22,2}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=0$$

$$\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2}\right)=\cot t$$

$$\Gamma_{22}^1=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=0$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=-\sin t\cos t$$

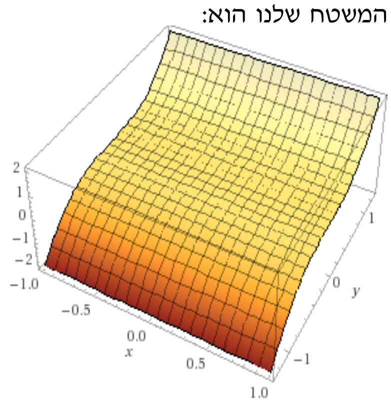
$$\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2}\right)=0$$

$$\Gamma_{22}^2=\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=0$$

ולכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases}t''+2\cot t\cdot t'\theta'=0\\ \theta''-\sin t\cos t\cdot t'\left(\theta'\right)^2=0\end{cases}$$

6. המשטח שלנו הוא:




(א) פרמטריזציה של המשטח היא:

$$r(u,v)=\left(u,v,v^3\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=(1,0,0), r_v=\left(0,1,3v^2\right)$$

מקדמי המטריקה הן:

$$\begin{gathered} g_{11}=\langle r_u,r_u\rangle=1 \\ g_{12}=g_{21}=\langle r_u,r_v\rangle=0 \\ g_{22}=\langle r_v,r_v\rangle=1+9v^4 \end{gathered}$$

ולכן המטריקה היא:

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+9v^4 \end{pmatrix}$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu}=\vec{0}, r_{uv}=r_{vu}=\vec{0}, r_{vv}=(0,0,6v)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_u\times r_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3v^2 \end{vmatrix}=\left(0,-3v^2,1\right)$$

$$\vec{n}=\frac{r_u\times r_v}{\|r_u\times r_v\|}=\frac{\left(0,-3v^2,1\right)}{\sqrt{1+9v^4}}$$

איברי המטריצה $B$ הם:

$$L_{11} = L_{21} = L_{22} = \langle r_{uu}, \vec{n} \rangle = \langle r_{uv}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$L_{22} = \langle r_{vv}, \vec{n} \rangle = \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}}$$

לכן המטריצה היא:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}} \end{pmatrix}$$

אופרטור הצורה הוא:

$$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+9v^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{(1+9v^4)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

ולכן עקמומיות גאוס היא:

$$K = \det S = 0$$

שימו לב שמקומית המשטח די דומה למישור.

*כבר כשרואים ש־$B-$ אינה הפיכה אפשר כמובן לומר שהעקמומיות היא 0.

(ב) נשתמש במשוואות הגיאודזיות:

$$\begin{cases} \left(\gamma^1\right)'' + \Gamma^1_{ij}\left(\gamma^1\right)'\left(\gamma^2\right)' = 0 \\ \left(\gamma^2\right)'' + \Gamma^2_{ij}\left(\gamma^1\right)'\left(\gamma^2\right)' = 0 \end{cases}$$

מקדמי כריסטופל הם:

$$\Gamma^2_{22} = \frac{18v^3}{1+9v^4}$$

והשאר מתאפסים. המשוואות הן:

$$\begin{cases} \left(\gamma^1\right)'' = 0 \\ \left(\gamma^2\right)'' + \frac{18v^3}{1+9v^4}\left(\gamma^2\right)'\left(\gamma^2\right)' = 0 \end{cases}$$

ואם נדבר בשפת $u, v$:

$$\begin{cases} (u)'' = 0 \\ (v)'' + \frac{18v^3}{1+9v^4}\left(v'\right)^2 = 0 \end{cases}$$

על $L$, $y = z = 0$, ולכן $v = 0$ והמשוואה השנייה אכן מתקיימת.
נותרנו עם:

$$u'' = 0$$

לכן $u(t)=at+b$. כלומר, הקו הגיאודזי הוא:

$$\gamma(t)=(at+b,0,0)$$

ואם ניקח למשל $a=0,b=1$ אכן נקבל את $L$.

7. פרמטריזציה של ספירה היא:

$$r(u,v)=(a\cos u\sin v,a\sin u\sin v,a\cos v)$$

כבר חישבנו מספיק מטריצות $B,G$ עד עתה, במקרה שלנו הן:

$$G=\begin{pmatrix} a^2\sin^2 v & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} a\sin^2 v & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$K=\det S=\frac{\det B}{\det G}=\frac{1}{a^2}$$

פרמטריזציה של הגליל היא:

$$r(u,v)=(b\cos u,b\sin u,v)$$

במקרה זה:

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $K=0$.

האוכף שלנו הוא פרבולואיד היפרבולי:

פרמטריזציה שלו היא:

$$r(u,v)=\left(u,v,u^2-v^2\right)$$

התבניות היסודיות נתונות על ידי המטריצות:

$$G=\begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$K=\det S=\frac{\det B}{\det G}=-\frac{4}{\left(1+4u^2+4v^2\right)^2}$$