שאלות למבחן

תרגיל 3

1. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x -ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n.

א. הראו כי B הינה מדידה לבג.(רמז: הציגו את B כך $B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$)

ב. אם $m(A_n)>\delta>0$ לכל n, הראו כי $m(B)>\delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ אז $m(B)=0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$ אבל $m(B)=0$.

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את B בצורה הבאה:

$$B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה x -ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה $\{A_n\}$. ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא- אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$ נקבל שהסדרה $\{E_k\}$ הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה B הינה מדידה שכחיתוך של מדידות.

ב. נשים לב כי $E_1\supseteq E_2\supseteq\dots$ וגם מתקיים כי $m(E_1)\le 1$ שכן $E_1\subseteq[0,1]$. ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)$$
$$\ge\lim_{k\to\infty}m(A_k)\ge\delta$$

ג. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ נובע כי $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}m(A_n)=0$. ברור כי $m(E_k)\le\sum_{n=k}^{\infty}m(A_n)$

שוב,

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)$$
$$\le \lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}m(A_n)=0$$

ניקח את $A_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$. קל לראות כי $m(A_n)=\frac{1}{n}$ וכי $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$. מצד שני $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n=A_k$ ולכן

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=0$$

2. יהיו $\mathfrak{A}_1$ ו $\mathfrak{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathfrak{A}_1)=\sigma(\mathfrak{A}_2)$.

פתרון: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי

$\sigma(\mathfrak{A}_2)\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי הסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה את $\mathfrak{A}_2$ מוכלת ב $\sigma(\mathfrak{A}_1)$, כלומר - $\sigma(\mathfrak{A}_2)\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$.

$\sigma(\mathfrak{A}_2)\supseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$: נובע מכך ש $\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_2$.

3. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A\in\sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathfrak{D}\subseteq\mathcal{E}$ כך ש $A\in\sigma(\mathfrak{D})$.

פתרון:

א. נסמן ב S קבוצת כל הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את התכונה ונראה כי S הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח $E\in\mathcal{E}$, ברור כי $X\in\sigma(E)$ ומכאן ש $X\in S$.

ii. אם $A\in S$ אזי נובע כי קיימת סדרה $\{E_n\}$ כך ש $E_n\in\mathcal{E}$ וגם $A\in\sigma(E_n,n\in\mathbb{N})$ מכאן ש $A^c\in\sigma(E_n,n\in\mathbb{N})$ ולכן $A^c\in S$.

iii. תהי $A_n \in S$. נובע כי לכל n קיימת סדרה $\left\{E_n^k\right\}$ של קבוצות כך ש $E_k^n \in \mathcal{E}$ וגם $A_n \in \sigma\left(E_k^n, k \in \mathbb{N}\right)$. קל לראות כי אז $\left\{E_k^n\right\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ הינה בת מנייה וכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma\left(E_k^n, n, k \in \mathbb{N}\right)$ ולכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in S$.

מכאן ש S הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל $E \in \mathcal{E}$ מתקיים כי $E \in \sigma(E)$ ולכן $E \in S$. מכאן נובע כי $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq S$ וסיימנו.

4. נניח ו $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X,S) ו $\mu_n(A)\uparrow$ לכל $A \in S$ אזי $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ברור כי $\mu(A) \geq 0$ לכל $A \in S$ וכי $\mu(\varnothing) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\varnothing) = 0$. נראה כי גם התכונה השלישית מתקיימת.

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j\to\infty} \mu_j\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n)$$

נסמן את הסכומים החלקיים $c_{ij} = \sum_{n=1}^{i} \mu_j(A_n)$. מתקיים

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n) = \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} c_{ij} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} c_{ij}$$

$$= \sup_{i,j\in\mathbb{N}} c_{ij} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} c_{ij} = \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} c_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{j\to\infty} \mu_j(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

מש"ל.

תרגיל 4

5. יהי מרחב מדיד (X,S) ויהיו f,g פונקציות מדידות S המקבלות ערכים ב $\mathbb{R}$. הראו כי הפונקציה $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} 1_{(g(x)\neq 0)}$ הינה מדידה S .

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha<0$, אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$h^{-1}\left(\left(-\infty,\alpha\right)\right)=\{x\in X\mid \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}<\alpha\}$$
$$=\{x\in X\mid f\left(x\right)<g\left(x\right)\alpha\}\cap\{\mathrm{g}\left(x\right)>0\}\bigcup\{x\in X\mid f\left(x\right)>g\left(x\right)\alpha\}\cap\{\mathrm{g}\left(x\right)<0\}$$
$$=\{x\in X\mid f\left(x\right)-g\left(x\right)\alpha<0\}\cap\{\mathrm{g}\left(x\right)>0\}\bigcup\{x\in X\mid f\left(x\right)-g\left(x\right)\alpha>0\}\cap\{\mathrm{g}\left(x\right)<0\}$$

מכיוון שהפונקציה $f-\alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.

<u>תרגיל 5</u>

6. תהי $f_n:X\to\mathbb{R}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n\to f$ במידה שווה. הראו כי אם $\mu\left(X\right)<\infty$ אזי f אינגרבילית וגם $\int f_n\to\int f$.

פתרון: מכיוון שההתכנסות הינה במ"ש נובע כי לכל x , עבור n גדול מספיק $\left|f\right|\le\left|f_n\right|+\varepsilon$ ומכאן ש f אינטגרבילית. מכיוון שההתכנסות הינה במידה שווה, נובע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים n גדול מספיק עבורו $\left|f-f_n\right|<\varepsilon$ לכל x . מכאן ש $\int\left|f-f_n\right|<\varepsilon\mu\left(X\right)$. מכיוון שהדבר נכון לכל ε נובע כי $\int\left|f-f_n\right|=0$. נשים לב כי $\left|\int f-f_n\right|\le\int\left|f-f_n\right|$ וסיימנו.

<u>תרגיל 6</u>

7. נניח כי $f,f_n:X\to[0,\infty]$ הינן פונקציות מדידות בממ"ח $\left(X,S,\mu\right)$. $f_n\to f$ כב"מ ו $\int f_n\to\int f<\infty$. הוכיחו כי $\int_A f_n\to\int_A f$ עבור כל $A\in S$.

פתרון: מכיוון שהפונקציות f_n חיוביות מתקיים כי $f_n 1_A\le f_n$ עבור כל $A\in S$. מכאן שמתקיימים כל התנאים להתכנסות הנשלטת המוכללת ולכן

$$\lim\int_A f_n=\lim\int f_n 1_A=\int\lim f_n 1_A=\int f 1_A=\int_A f$$

8. (משפט לוסין) תהי $f=1_A$ פונקצית דריכלה בקטע $[0,1]$, כלומר, $A=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה סגורה F (מצאו את F ממש) בקטע $[0,1]$ כך שהצמצום של f על F הינה פונקציה רציפה ומתקיים $m\left([0,1]\setminus F\right)<\varepsilon$.

פתרון: נגדיר את סדרת הרציונאליים ב $\mathbb{R}$ $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ונגדיר את הקטע $I_i=\left(q_i-\varepsilon 2^{-i-1},q+\varepsilon 2^{-i-1}\right)$, ברור כי $m\left(I_i\right)=\varepsilon 2^{-i}$ וכי $m\left(\bigcup_i I_i\right)\le\sum_i m\left(I_i\right)=\varepsilon$.

נגדיר את $F=[0,1]\setminus\bigcup_i I_i$ ונשים לב כי , כי הקבוצה F סגורה ואינה מכילה ראציונליים ומכיוון ש $m\left(F\right)=m\left([0,1]\setminus\bigcup_i I_i\right)>1-\varepsilon$ נובע ש $m\left([0,1]\setminus F\right)<\varepsilon$. בנוסף הצמצום של f על F הינה פונקציה קבועה ולכן רציפה. מכאן ש F הינה הפונקציה הנדרשת.

9. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: $\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x-h\right)-f\left(x\right)\right|dm=0$.

רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

פתרון: אנו יודעים כי מכיוון ש f אינטגרבילית אז לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונקציה g רציפה אשר מתאפסת מחוץ לקטע חסום כך ש $\int\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dm<\varepsilon$. נבנה סדרה g_n של פונקציות רציפות כאלו כך ש $\int\left|f\left(x\right)-g_n\left(x\right)\right|dm<\frac{1}{2^{n+1}}$. מכאן נובע כי

$$\begin{aligned}&\int\left|f\left(x-h\right)-f\left(x\right)-\left(g_n\left(x-h\right)-g_n\left(x\right)\right)\right|dm\\&\le\int\left|f\left(x-h\right)-g_n\left(x-h\right)\right|dm+\int\left|f\left(x\right)-g_n\left(x\right)\right|dm<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

מכאן נובע כי ההתכנסות היא ב L_1 . מכיוון שיש גם התכנסות נקודתית נובע כי

$$\int_{\mathbb{R}}\left|g_n\left(x-h\right)-g_n\left(x\right)\right|dm\to\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x-h\right)-f\left(x\right)\right|dm$$

עכשיו, נשים לב כי מכיוון ש $\left|g_n\left(x-h\right)-g_n\left(x\right)\right|<\left|g_n\left(x-h\right)\right|+\left|g_n\left(x\right)\right|$, עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת ורציפות הפונקציה g נובע כי

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|g_n\left(x-h\right)-g_n\left(x\right)\right|dm\\&=\int_{\mathbb{R}}\lim_{h\to 0}\left|\left(g_n\left(x-h\right)-g_n\left(x\right)\right)\right|dm=\int_{\mathbb{R}}0=0\end{aligned}$$

מכאן ש

$$\lim_{h\to0}\left|\int_{\mathbb{R}}\left|f(x-h)-f(x)\right|dm-\int_{\mathbb{R}}\left|g_n(x-h)-g_n(x)\right|dm\right|=\left|\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x-h)-f(x)\right|dm\right|+0\le\frac{1}{2^n}$$

נשאיף את n לאינסוף ונקבל את התוצאה.

<u>תרגיל</u> 8

10. התסתכלו על הפונקציה הבאה המוגדרת על $[-1,1]$:

$$f=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

א. האם הפונקציה גזירה?
ב. האם הפונקציה רציפה ליפשיץ?
ג. האם לפונקציה השתנות חסומה?

פתרון:

א. הפונקציה כמובן גזירה והנגזרת הינה

$$f'=\begin{cases}2x\sin\left(1/x^2\right)-\frac{2}{x}\cos\left(1/x^2\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

נראה רק כי הפונקציה אכן גזירה ב $x=0$. מתקיים $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\left(1/h^2\right)}{h}=0$

ב. מכיוון שהנגזרת f' איננה חסומה בקטע $[-1,1]$ נובע כי לכל $M,\varepsilon>0$ קיים $-1\le x_0\le1$ כך ש $f'(x_0)>M+\varepsilon$ מכאן שקיים $h>0$ כך ש $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>M$ ומכאן שהפונקציה איננה רציפה ליפשיץ.

ג. מספיק לבדוק מהן התנודות בין הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת. נשווה את הנגזרת ל 0 ונקבל

$$2x\sin\left(1/x^2\right)-\frac{2}{x}\cos\left(1/x^2\right)=0\Leftrightarrow\tan\left(1/x^2\right)=\frac{1}{x^2}$$

עבור $x \approx 0$ נקבל כי $1/x^2 \to \infty$ ולכן פתרונות המשוואה באופן אסימפוטוטי יהיו $1/x^2 \approx \pi/2 + \pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ גדול. מכאן ש $x \approx \sqrt{\frac{2}{\pi + 2\pi k}}$ ולכן התנודות סביב הנקודה $x = 0$ של הפונקציה יהיו

$$TV(f) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi + 2\pi(k+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi(k+1)\right) - \frac{2}{\pi + 2\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi + 2\pi 2k} + \frac{2}{\pi + 2\pi(2k-1)}$$

ברור כי הטור האחרון מתבדר כמו טור הרמוני ולכן לפונקציה אין השתנות חסומה.

11. נניח ו f הינה פונקציה רציפה על $[0,1]$ ו f רציפה בהחלט על $(a,1]$ לכל $a \in (0,1)$. האם f בהכרח רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם בנוסף f הינה בעלת השתנות חסומה ב $[0,1]$ האם אז f הינה רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם לא, תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ניקח לדוגמא את הפונקציה בשאלה הראשונה. מכיוון ש f תהיה אז גזירה ברציפות בקטע $(a,1]$ לכל $a \in (0,1)$ אזי היא רציפה ליפשיץ ולכן רציפה בהחלט. אבל מכיוון שאיננה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ אז נובע כי איננה רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$. לעומת זאת, אם בנוסף f בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ נובע כי f גזירה בקטע $[0,1]$ ולכן $\int_0^x f' \le f(x) - f(0)$. אבל f רציפה בהחלט על $(a,1]$ ולכן $\int_0^x f' = \int_0^a f' + \int_a^x f' = \int_0^a f' + f(x) - f(a)$. נשאיף את a ל 0 ומכיוון ש f רציפה ומתכונות האינטגרל נובע כי $\lim_{a \to 0} \int_0^a f' + f(x) - f(a) = f(x) - f(0)$. ולכן בסה"כ נקבל כי $\int_0^x f' = f(x) - f(0)$, כלומר f רציפה בהחלט.

<u>תרגיל 9</u>

12. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות f_n חיוביות עולות ואינטגרביליות רימן אשר מתכנסות נקודתית לפונקציה f חסומה אך איננה אינטגרבילית רימן. תרגיל זה מראה כי משפט ההתכנסות המונוטונית ומשפט ההתכנסות החסומה איננו תקף עבור אינטגרלי רימן.

פתרון: נסתכל על הקטע $[0,1]$ ונסדר את $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ בסדרה $\{q_n\}$. נגדיר את הפונקציות הבאות:

$$f_n = \begin{cases} 1 & x \in \{q_1, q_2, ..., q_n\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ברור כי נקודתית, הסדרה f_n מתכנסת לפונקצית דריכלה. כמו כן, עפ"י משפט שלמדנו פונקציה הינה אינטגרבילית רימן אמ"מ היא רציפה כב"מ. ולכן f_n אינטגרבילית לכל n. אבל פונקצית דריכלה איננה רציפה באף נקודה ולכן איננה אינטגרבילית רימן. מכאן שקיימת סדרה של פונקציות אינטגרביליות רימן המתכנסות מונוטונית לפונקציה חסומה אך הפונקציה איננה אינטגרבילית .

13. נניח ו $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית , f חסומה על $(a,1]$ לכל $a > 0$ ואינטגרל רימן הלא אמיתי $\lim_{a\to 0^+} R\left(f1_{(a,1]}\right)$ קיים. הראו כי הגבול שווה ל $\int_0^1 f(x)dm$.

פתרון: מכיוון ש $R\left(f1_{(\frac{1}{n},1]}\right)$ קיים ומכיוון שהפונקציה f חסומה על $(a,1]$ לכל $\varepsilon > 0$ נוכל לבנות סכומי דרבו עליונים אינטגרביליים לבג, כלומר נוכל למצוא חלוקה $P = \{x_0 x_1, x_2, ..., x_m\}$ ו $f_n(x) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sup_{x_{i-1}\le y\le x_i} f(y)\right)1_{[x_{i-1},x_i)}(x)$ כך ש $R(f_n) - R\left(f1_{(\frac{1}{n},1]}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. נסמן $\lim_{a\to 0^+} R\left(f1_{(a,1]}\right) = I$ ונובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $I - R\left(f1_{(\frac{1}{n},1]}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ וסכום דרבו עליון f_n כך ש $R(f_n) - R\left(f1_{(\frac{1}{n},1]}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ ולכן $R(f_n) \to I$. מכיוון ש $f_n \ge f1_{(\frac{1}{n},1]}$ עפ"י DCT נובע כי

$$\lim_{a\to 0^+} R\left(f1_{(a,1]}\right) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f1_{(\frac{1}{n},1]}dm = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f1_{(\frac{1}{n},1]}dm = \int_0^1 f dm.$$

דרך יותר פשוטה: נגדיר $f_n = f1_{\left\{\frac{1}{n},1\right\}}$ פונקציה זו נשלטת ע"י הפונקציה $|f|$ אשר עפ"י הנתון אינטגרבילית. מכאן שעפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע ש

$$\lim_{a\to 0^+} R\left(f1_{(a,1]}\right) = \lim_{n\to\infty} R\left(f1_{(\frac{1}{n},1]}\right) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f1_{(\frac{1}{n},1]}dm = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f1_{(\frac{1}{n},1]}dm = \int_0^1 f dm$$

<u>תרגיל 10</u>

14. תהי A תת קבוצה של $[0,1]^2$ מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה $m_2(A)=1$ כאשר $m_2 = m\times m$ ו m הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל $x\in[0,1]$ הקבוצה $s_x(A)=\{y:(x,y)\in A\}$ הינה בעלת מידה $m(s_x(A))=1$.

פתרון: ברור כי הפונקציה 1_A הינה מדידה לבג ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה של $[0,1]^2$. כמו כן נובע כי

$$\int_{[0,1]^2} 1_A(x,\mathrm{y})dm_2(x,y)=m_2(A)=1<\infty$$

עפ"י משפט טונלי נקבל כי

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} 1_{s_x(A)}(x,y)m(dy)\right)m(dx)=\int_{[0,1]} m(s_x(A))m(dx)=1$$

נובע כי

$$\int_{[0,1]}\left(1-m(s_x(A))\right)m(dx)=0$$

מכיוון ש $s_x(A)\subseteq[0,1]$ נובע כי $m(s_x(A))\le 1$ ולכן $1-m(s_x(A))\ge 0$ לכל $x\in[0,1]$.
ראינו כבר כי אם $f\ge 0$ כב"מ וגם $\int fd\mu=0$ אזי נובע כי $f=0$ כב"מ. מכאן ש $1-m(s_x(A))=0$ כב"מ ולכן $1=m(s_x(A))$ כב"מ.

<u>תרגיל 11</u>

15. הוכיחו כי קבוצת הפונקציות הפשוטות צפופה ב L^p עבור $p\ge 1$.

פתרון: תהי $f\in L^p$ $\left(\int|f|^p d\mu<\infty\right)$ חיובית. אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות φ_n כך ש$\varphi_n\le\varphi_{n+1}$ ו $\varphi_n\to f$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\int\phi_n{}^p d\mu=\int\lim_{n\to\infty}\phi_n{}^p d\mu=\int f^p d\mu$$

ראינו בהרצאה את אי השוויון $|a+b|^p\le 2^p\left(|a|^p+|b|^p\right)$. נגדיר את $g_n=2^p\left(|\varphi_n|^p+|f|^p\right)$.
ברור כי לכל n g_n אינגרבילית וכן כי $g=\lim g_n=2^{p+1}|f|^p$ אינטגרבילית. מכאן , עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$\lim_{n\to\infty}\int|f-\phi_n|^p\,d\mu=\int\lim_{n\to\infty}|f-\phi_n|^p\,d\mu=0$ ומכאן שההתכנסות היא ב L^p . עבור פונקציה כללית, נשתמש בא"ש מינקובסקי על מנת לקבל
$\left\|f^+-f^--\left(\varphi_n^+-\varphi_n^-\right)\right\|_p\le\left\|f^+-\varphi_n^+\right\|_p+\left\|\varphi_n^--f^-\right\|_p\to0$.

16. הראו כי L^∞ הינו מרחב שלם.

פתרון: עפ"י מה שראינו בכיתה מספיק להראות כי כל טור ב L^∞ שמתכנס בהחלט מתכנס. נניח ו $f_n\in L^\infty$, וגם $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_\infty<\infty$. נגדיר את $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ ולכל f_n נגדיר את הקבוצה $E_n=\left\{x:|f(x)|>\|f\|_\infty\right\}$. ברור כי $m(E_n)=0$ וגם כי $m(E)=m\left(\bigcup_n E_n\right)=0$.
. מן ההגדרה של $\|\cdot\|_\infty$ נובע כי $f(x)$ מתכנס בהחלט כב"מ(על E) ולכן גם מתכנס כב"מ.
נראה כי $f\in L^\infty$,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in E^c}|f(x)|&\le\sup_{x\in E^c}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in E^c}|f_n(x)|\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n(x)\|_\infty<\infty\end{aligned}$$

ומכאן ש $f\in L^\infty$.

<u>תרגיל 12</u>

17. יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות כך ש $\mu\ll\nu$ ו $\mu=gd\nu$. הראו כי אם f פונקציה אינטגרבילית ביחס למידה μ אזי היא אינטגרבילית ביחס למידה ν ומתקיים

$$\int fgd\nu=\int fd\mu$$

פתרון: נרשום $f=f^++f^-$. נקרב את f^+ ע"י פונקציות פשוטות φ_n כך ש $\int\varphi_n d\mu\uparrow\int fd\mu$. נשים לב כי עבור כל פונקציית אינדיקטור מתקיים $\int 1_A fd\nu=\int 1_A d\mu$. ולכן הדבר נכון גם עבור פונקציות פשוטות. מכאן שמתקיים
$\int f^+gd\nu\overset{MCT}{=}\lim\int\varphi_n gd\nu=\lim\int\varphi_n d\mu=\int f^+d\mu$. נראה את אותו הדבר עבור f^-
וסיימנו.

18. נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות סיגמא סופיות כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ. תהי $\rho=\mu+\nu$. שימו לב כי $\mu \ll \rho$ וגם כי $\nu \ll \rho$. הוכיחו כי אם $f=\frac{d\mu}{d\rho}$ ו $g=\frac{d\nu}{d\rho}$ אזי

א. $f>0$ כב"מ μ.

ב. $f+g=1$ כב"מ ρ.

ג. $d\nu=\frac{g}{f}d\mu$.

פתרון:

א. מהנתון כי $\nu \ll \mu$ נובע כי $\rho \ll \mu$. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי לכל A מדידה מתקיים

$$\mu(A)=\int_A fd\rho$$

נניח בשלילה ש א' אינו מתקיים. אזי קיימת בהכרח קבוצה מדידה E כך ש $\mu(E)>0$ וגם $f=0$ על E. אבל אז $\mu(E)=\int_A fd\rho=0$. בסתירה להנחה ש $\mu(E)>0$.

ב. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי $\mu(A)=\int_A fd\rho$ וגם כי $\nu(A)=\int_A gd\rho$ לכל A מדידה. ע"י קירוב של פונקציות פשוטות נראה כי אם $z(x)$ פונקציה מדידה אזי נובע כי אם $\int zd\nu<\infty$ וגם $\int zd\mu<\infty$ אזי $\int zd\mu=\int zfd\rho$ וגם $\int zd\nu=\int zgd\rho$. מכאן שעבור כל A מדידה נובע כי

$$\begin{aligned}&\int 1_A(f+g)d\rho=\int 1_A fd\rho+\int 1_A gd\rho\\&=\mu(A)+\nu(A)=\rho(A)=\int 1_A d\rho\end{aligned}$$

לכן נובע כי $f+g=1$ כב"מ ρ.

ג. עפ"י משפט רדון ניקודים והנתון, נובע כי קיימת פונקציה חיובית h כך ש $\nu(A)=\int 1_A hd\mu$ לכל A מדידה. מצד שני

$$\begin{aligned}&\int 1_A gd\rho=\nu(A)=\int 1_A hd\mu=\\&\int 1_A hd\mu=\int 1_A hfd\rho\end{aligned}$$

ומכאן ש כב"מ ρ $g=fh \Leftarrow h=\frac{g}{f}$.