תרגול 1 – אינפי 3

הגדרות

1) $\mathbb{R}^n$ היא קבוצת כל החיות הסדורות של מספרים ממשיים, כלומר
$$\mathbb{R}^n = \{\bar{a} = (a_!, \dots, a_n)\}$$

כאשר מגדירים עליו פעולות חיבור וכפל בסקלר

$$\bar{a} + t\bar{b} = (a_1 + tb_1, \dots, a_n + tb_n)$$

2) תהיינה $\bar{a}, \bar{b}$ נקודות ב$\mathbb{R}^n$ מהצורה $\bar{x} = t\bar{a} + (1-t)\bar{b}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו, $\bar{x}$ הנ"ל ייחשב כישר ב$\mathbb{R}^n$ העובר דרך הנקודות $\bar{a}, \bar{b}$

תרגיל

עבור ההצגה הפרמטרית של הישר ב$\mathbb{R}^2$ (אפשר דומה להראות ב$\mathbb{R}^n$) העובר דרך הנקודות $\bar{a} \neq \bar{b}$ להצגת הישר $y = mx + n$ או $x = p$

פתרון

נסמן $\bar{x} = (x, y), \bar{b} = (b_1, b_2), \bar{a} = (a_1, a_2)$

ע"פ ההגדרה הפרמטרית:

$$\bar{x} = t\bar{a} + (1-t)\bar{b} \Rightarrow (x, y) = (ta_1, ta_2) + \big((1-t)b_1, (1-t)b_2\big) = (ta_1 + (1-t)b_1, ta_2 + (1-t)b_2)$$

$$x = t(a_1 - b_1) + b_1$$
$$y = t(a_2 - b_2) + b_2$$

כלומר בהינתן נקודה (x_o, y_o) הנמצאת על הישר העובר דרך $\bar{a}, \bar{b}$ מתקיים:

$$x_0 = t(a_1 - b_1) + b_1$$
$$y_0 = t(a_2 - b_2) + b_2$$

אם $a_1 \neq b_1$

$$(*) t = \frac{x_0 - b_1}{a_1 - b_2}$$

לכן עבור y_0 ב* נקבל

$$y_0 = \frac{x_0 - b_1}{a_1 - b_1}(a_2 - b_2) + b_2 = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}x_0 - \frac{b_1(a_2 - b_2)}{a_1 - b_1} + b_2$$

וקיבלנו קו ישר

עבור $a_1 = b_1$

קיבלנו את המערכת

$$\begin{cases} x = b_1 \\ y = t(a_2 - b_2) + b_2 \end{cases}$$

שוב בהניתן נקודה (x_0, y_0) הנמצאת על הישר $x = b_1$ לכל y_0 ניתן לקבוע $t = \frac{y_0 - b_2}{a_2 - b_2}$

ובמקרה זה נקבל שאם $a_1 = b_1$ אזי הישר הוא הישר $x = b_1$

הגדרה

תהיינה $\bar{a}, \bar{b}$ נקודות שונות ב$\mathbb{R}^n$. קבוצת כל הנקודות מהצורה $\bar{x} = t\bar{a} + (1-t)\bar{b}$ כאשר $0 \le t \le 1$ נקראת קטע ב$\mathbb{R}^n$ המחבר את $\bar{a}$ ל$\bar{b}$.

דוגמאות

$$D = [1,3] \times [2,3]$$

הגדרה

$I_1 \times \ldots \times I_n$ קטעים סופיים כלשהם ב$\mathbb{R}^n$, המכפלה הקרטזית $I_1 \times \ldots \times I_n$ נקראת תיבה n-מימדית.

שימו לב:

הקטעים I_i כאשר $1 \le i \le n$ לא חייבים להיות סגורים או פתוחים.

הערה:

$I_1 = \cdots = I_n$ נקבל את הקוביה הn מימדית.

הערה:

ראינו כי המרחק בין $\bar{a}$ ל0 היא הנורמה של $\bar{a}$, סימונו ע"י $||a||$, באופן דומה נקבל שמרחק בין $\bar{a}, \bar{b}$ שיסומן ע"י $||a-b||$, דרושה כאן הגדרה מתאימה.

הגדרה (נורמה)

$$||x|| \in [0, \infty)$$

תכונות:

1) $x = 0 \Leftrightarrow ||x|| = 0$
2) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3) אי שוויון המשולש $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$

דוגמאות

1) $||\mathrm{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
2) $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
3) $||x||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}$

הגדרה (מרחק)

מטריקה (או פונ' מרחק) על קבוצה לא ריקה X היא פונקציה $d: X \times X \to [x, \infty)$

המקיימת:

1) $d(x,y) \ge 0$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

הקבוצה X עם הפונ' d נקראת מרחב מטר'

$$(\bar{X}, d)$$

זוג סגור של המרחב והמטריקה שהגדרנו עליה.

מרחבים נורמיים הם מקרים ספציפיים של מרחבים מטריים.

הגדרה

תהיינה $\bar{a},\bar{b}$ נקודות ב-$\mathbb{R}^n$, נגדיר את המרחק $d(\bar{a},\bar{b})=||a-b||$.

תרגיל

הראה כי d הנ"ל היא מטריקה $d(a,b)=\begin{cases}2 & a\neq b\\ 0 & a=b\end{cases}$

פתרון

1) $d(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$

$d(a,b)\geq 0$

2) $d(a,b)=d(b,a)$

3) אם $a=b$ אזי $d(a,b)=0\leq d(a,z)+d(z,b)$

אחרת אם $a\neq b$ ולכן $a\neq z \lor z\neq b$ ולכן $d(a,b)=2\leq d(a,z)+d(z,a)$.

הערה

מתקיים $|a_i|\leq ||a||$ כי $a_i=\sqrt{|a_i|^2}\leq\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}=||a||$

תרגיל

הוכחת את אי השוויון הבא:

$$\frac{|x_1|+\dots+|x_n|}{\sqrt{n}}\leq\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\leq|x_1|+\dots+|x_n|$$

הוכחה

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2\overset{\text{אפשר להראות}}{=}\sum_{i,j=1}^{n}|x_i||x_j|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+2\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}}|x_i||x_j|\geq\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

נוציא שורש ונקבל את הרצוי.

עבור האי שוויון השמאלי, נגדיר $y=(1\ 1\ 1\ \dots\ 1)$, $x=(|x_1|,\dots,|x_n|)$

לפי אי שוויון קושי שוורץ $|<x,y>|\leq||x||||y||$

$$||x||=\sqrt{|x_1|^2+\dots+|x_n|^2}$$

$$||y||=\sqrt{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\leq\sqrt{n}\sqrt{|x_1|^2+\dots+|x_n|^2}$$