תרגיל 5 – אינטגרל משטחי מסוג שני, משפט הדיברגנץ

.1

יהי R התחום החסום בין הגליל $x^2+y^2=1024$ והמישורים $z=0, z=20$. חשבו את $\iint_R F\cdot ndS$ כאשר $F(x,y,z)=\left(x^3,y^3,z^3\right)$ ו-n נורמל היחידה החיצוני של R.

.2

יהי S^2 ספירת היחידה ב-$\mathbb{R}^3$. חשבו את

$$\iint_{S^2}\left(x^2+y+z\right)dS.$$

עובדה. הלפלסיאן Δ הוא אופרטור המוגדר לפי $\Delta f=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ לכל $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

.3

יהיו $u,v:D\to\mathbb{R}$ מוגדרות בתחום $D\subset\mathbb{R}^3$ ובעלת שתי נגזרות חלקיות רציפות במ"ש ב-D. יהי T שפת D.

(א) הראו כי

$$\iiint_D\left(u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v\right)dxdydz=\iint_T uv_n dS$$

עבור v_n הנגזרת הכיוונית של v בנקודה (x,y,z) על המשטח בכיוון נורמל היחידה החיצוני בנקודה זו.

(ב) הסיקו בדומה כי

$$\iiint_D\left(u\Delta v-v\Delta u\right)dxdydz=\iint_T\left(uv_n-vu_n\right)dS.$$

(ג) הסיקו כי אם $\Delta u=\Delta v=0$ אז

$$\iint_T uv_n dS=\iint_T vu_n dS.$$

.4

השתמשו במשפט הדיברגנץ כדי לחשב את נפח התחום החסום בין $x^2+y^2+z^2=1$ לבין $z=\frac{1}{2}$.

.5

השתמשו במשפט הדיברגנץ כדי לחשב את נפח התחום המקיים $x^2+y^2\leq(2-z)^2$ בין המישורים $z=0$ ו $z=1$.