תרגיל 7 מבוא לתורת החבורות

שאלה 7.1

1. תהי G חבורה ציקלית אינסופית. הוכיחו כי $G \simeq \mathbb{Z}$. הדרכה: קחו $g \in G$ יוצר והגדירו $f : \mathbb{Z} \to G$ לפי

$$f(k) = g^k$$

הראו כי f הוא איזומורפיזם.
פתרון: f הומומורפיזם: כי

$$f(k_1 + k_2) = g^{k_1+k_2} = g^{k_1} g^{k_2} = f(k_1) f(k_2)$$

f על: לכל $x \in G$ קיים k כך ש $g^k = x$ ולכן

$$f(k) = g^k = x$$

f חד חד ערכי: נראה ש $\ker f = \{e\} = \{0\}$.

$$\ker f = \{k \in \mathbb{Z} \mid g^k = e\}$$

היות ש $\mathrm{o}(g) = |\langle g \rangle| = |G| = \infty$ אין אף חזקה חיובית של g שתצא e ולכן בהכרח

$$\ker f = \{0\}$$

ולכן f חד חד ערכי כנדרש.

2. תהי G חבורה ציקלית מסדר n הוכיחו כי $G \simeq \mathbb{Z}_n$. הדרכה: קחו $g \in G$ יוצר והגדיר $f : \mathbb{Z} \to G$ לפי

$$f(k) = g^k$$

העזרו במשפט האיזומורפיזם הראשון.
פתרון: להוכיח ש f היא אפימורפיזם זה בדיוק כמו בסעיף הקודם. עכשיו נחשב את הגרעין.

$$\ker f = \{k \in \mathbb{Z} \mid g^k = e\}$$

היות ש

$$\mathrm{o}(g) = |\langle g \rangle| = |G| = n$$

נקבל ש

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid g^k = e\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid, \quad n \mid k\} = n\mathbb{Z}$$

ולכן לפי משפט האיזומורפיזם הראשון

$$G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$$

שאלה 7.2

1. תהינה G, H חבורות ויהיו $K \lhd G$ ו $N \lhd H$ שתי תתי חבורות נורמליות. הוכיחו כי $K \times N \lhd G \times H$ ומתקיים

$$G \times H/K \times N \simeq (G/K) \times (H/N)$$

פתרון: נגדיר $f : G \times H \to (G/K) \times (H/N)$ לפי

$$f(g,h) = (gK, hN)$$

f הומומורפיזם:

$$\begin{aligned} f((g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)) &= f((g_1g_2, h_1h_2)) = (g_1g_2K, h_1h_2N) \\ &= (g_1K, h_1N)\cdot(g_2K, h_2N) = f((g_1,h_1))\cdot f((g_2,h_2)) \end{aligned}$$

f היא על כי: לכל איבר $(gK, hN) \in (G/K) \times (H/N)$ יש מקור שהוא (g,h).
נחשב את הגרעין של f. איבר היחידה של $(G/K) \times (H/N)$ הוא (K, N)

$$\ker f = \{(g,h) \in G \times H \mid (gK, hN) = (K,N)\}$$

$$gK = K \Leftrightarrow g \in K$$

$$hN = N \Leftrightarrow h \in N$$

ולכן

$$\ker f = K \times N$$

ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון

$$G \times H/K \times N \simeq (G/K) \times (H/N)$$

2. מהו ה n שעבורו יש איזומורפיזם בביטוי הבא?

$$\mathbb{Z}_{24}/\langle 4\rangle \simeq \mathbb{Z}_n$$

הוכיחו שבאמת זה איזומורפיזם.
פתרון: הסדר של $\mathbb{Z}_{24}$ הוא 24. הסדר של 4 ולכן גם של $\langle 4\rangle$ הוא 6. לכן

$$|\mathbb{Z}_{24}/\langle 4\rangle| = \frac{24}{6} = 4$$

אז חייבים $n = 4$ בשביל איזומורפיזם. אפשר להוכיח ישירות שזה איזומורפיזם. אבל אפשר גם להוכיח בעקיפין. חבורת מנה של חבורה ציקלית חייבת להיות חבורה ציקלית (זה משפט מהתרגיל הקודם). ולכן

$$\mathbb{Z}_{24}/\langle 4\rangle$$

היא חבורה ציקלית מסדר 4. לפי התרגיל הראשון היא בהכרח איזומורפית ל $\mathbb{Z}_4$ ובזה סיימנו.

שאלה 7.3 כמה סימונים: עבור כל שדה $\mathbb{F}$ נסמן ב $\mathbb{F}^*$ את החבורה $(\mathbb{F}\backslash\{0\},\cdot)$ (הייתי צריך להציג את הסימון הזה בשלב מוקדם יותר בקורס). בנוסף נסמן ב $\mathbb{R}^+$ את תת החבורה של $\mathbb{R}^*$ שמכילה את כל המספרים החיוביים. כמו כן נסמן

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

שהיא גם חבורה שכבר דיברנו עליה. הוכיחו כי

.1

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^*$$

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^*$$

לפי

$$f(A) = |A|$$

זה באמת הומומורפיזם כי

$$f(AB) = |AB| = |A||B| = f(A)f(B)$$

f היא על כי לכל מספר יש מטריצה הפיכה שהוא הדטרמיננטה שלה. למשל ניקח $x \in \mathbb{F}^*$ אז

$$\left| \begin{pmatrix} x & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = x$$

מה הגרעין של f? כמובן

$$\ker f = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \mid |A| = 1\} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$$

ולכן לפי משפט האיזומורפיזם הראשון

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$$

.2

$$\mathbb{C}^* / S^1 \simeq \mathbb{R}^+$$

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$$

לפי

$$f(z) = |z|$$

כמובן ש f הוא הומומורפיזם כי

$$f(zw) = |zw| = |z||w| = f(z)f(w)$$

כמובן ש f על כי אם $x \in \mathbb{R}^+$ אז $f(x) = x$. מה הגרעין של f?

$$\ker f = \{z \in C^* \mid |z| = 1\} = S^1$$

ולכן לפי משפט האיזומורפיזם הראשון

$$C^*/S^1 \simeq \mathbb{R}^+$$

שאלה 7.4 נביט על $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. נסמן ב $\mathrm{B}_n(\mathbb{F})$ תת החבורה שמכילה את כל המטריצות המשולשיות העליונות. (אין צורך להוכיח שזו תת חבורה). נסמן ב $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$ את תת החבורה שמכילה את כל המטריצות האלכסוניות.

מצאו תת חבורה נורמלית $K \lhd \mathrm{B}_n(\mathbb{F})$ כך ש $\mathrm{B}_n(\mathbb{F})/K \simeq \mathrm{D}_n(\mathbb{F})$. הוכיחו.

פתרון: נגדיר בצורה די טבעית פונקציה

$$f : \mathrm{B}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{D}_n(\mathbb{F})$$

שמקבלת מטריצה A ומאפסת את כל הערכים למעט האלכסון. כלומר

$$[f(A)]_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

f באמת הומומורפיזם: צריך להוכיח ש

$$f(AB) = f(A)f(B)$$

ברור שבשני האגפים יש כאן מטריצות אלכסוניות. ובנוסף

$$[f(AB)]_{i,i} = [AB]_{i,i}$$

היות ש A, B הן משולשיות עליונות זה שווה ל

$$A_{i,i}B_{i,i} = [f(A)]_{i,i}[f(B)]_{i,i} = [f(A)f(B)]_{i,i}$$

כנדרש. ברור ש f על כי אם D מטריצה אלכסונית אז

$$f(D) = D$$

מה הגרעין של f? כל המטריצות המשולשיות עליונות שנשלחות ל I הן בדיוק המטריצות שעל האלכסון יש להם 1 בכל מקום. כלומר

$$K = \{A \in B_n(\mathbb{F}) \mid A_{i,i} = 1\}$$

ואז באנת

$$\mathrm{B}_n(\mathbb{F})/K = \mathrm{D}_n(\mathbb{F})$$

שאלה 7.5 תהי H קבוצת כל הסדרות הממשיות (כמו באינפי). נגדיר פעולה של חיבור איבר איבר. קל לוודא ש H חבורה.
(בעצם $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots = \mathbb{R}^{\aleph_0}$)
נגדיר פונקציה $f : H \to H$ בצורה הבאה. לכל $\{a_n\} \in H$

$$f(\{a_n\}) = \{b_n\}$$

כאשר b_nמוגדרת לפי

$$b_n = a_{n+1}$$

בעצם f פשוט מוחקת את האיבר הראשון של הסדרה. כלומר

$$f((a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (a_2, a_3, \ldots)$$

1. הוכיחו כי f היא אפימורפיזם.
פתרון: f הומומורפיזם

$$\begin{aligned} f((a_1, a_2, a_3, \ldots) + (b_1, b_2, b_3, \ldots)) &= f((a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots)) = \\ &= (a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots) = (a_2, b_2, \ldots) + (a_3, b_3, \ldots) \\ &= f((a_1, a_2, a_3, \ldots)) + f((b_1, b_2, b_3, \ldots)) \end{aligned}$$

f על מפני ש

$$f((0, a_1, a_2, \ldots)) = (a_1, a_2, \ldots)$$

2. האם קיימת חבורה G ותת חבורה נורמלית $G \rhd N \neq \{e\}$ כך ש $G \simeq G/N$?
פתרון: לפי הסעיף הקודם ומשפט האיזומורפיזם הראשון

$$G/\ker f \simeq G$$

אז אפשר לבחור $N = \ker f$ רק צריך לוודא ש $\ker f$ הוא לא טריוויאלי, כלומר ש f אינה חד חד ערכית. אבל באמת

$$f((1, 0, 0, 0, \ldots)) = (0, 0, 0, \ldots)$$

ובזה סיימנו

שאלה 7.6 (לא קשור למשפט האיזומורפיזם הראשון - אבל כמו בתרגיל הקודם, נראה כאן התנהגות מוזרה של חבורות מנה)

1. הוכיחו כי $\mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z}$ (כן. חבורה יכולה להיות איזומורפית לתת חבורה שלה.)
פתרון: נגגיר פונקציה $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ לפי

$$f(x) = 2x$$

ברור ש f הומומורפיזם כי

$$f(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$$

וודאי ש f חד חד ערכית כי $2x = 2y$ אכן גורר $x = y$ וכמובן ש f על כי לכל $2x \in 2\mathbb{Z}$ מתקיים $f(x) = 2x$. ולכן f איזורמורפיזם כנדרש.

2. מצאו חבורה G ושתי תתי חבורות נורמליות $N_1, N_2 \lhd G$ כך ש $N_1 \simeq N_2$ אבל למרות זאת

$$G/N_1 \not\simeq G/N_2$$

פתרון: ניקח $G=\mathbb{Z}$ ו $N_1=\mathbb{Z}$ ו $N_2=2\mathbb{Z}$. לפי הסעיף הקודם

$$N_1 \simeq N_2$$

אבל

$$G/N_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \{e\}$$

$$G/N_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$$