אלגברה ליניארית להנדסה 83-110 תש״ע

פתרון תרגיל 7

באדיבות שי ידרמן. שפצורים : מיטל אליהו

1. הראו כי הווקטורים $v_3=\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}$, $v_2=\begin{Bmatrix}1\\1\\2\end{Bmatrix}$, $v_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$ מהווים בסיס ל-$\mathbb{R}^3$ והציגו את הוקטור $v=\begin{Bmatrix}6\\9\\14\end{Bmatrix}$ כצ״ל של וקטורי הבסיס הנ״ל.

פתרון

יש להראות כי הווקטורים : $v_3=\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}$, $v_2=\begin{Bmatrix}1\\1\\2\end{Bmatrix}$, $v_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$ הם בסיס ל-$\mathbb{R}^3$ ולהביע את $v=\begin{Bmatrix}6\\9\\14\end{Bmatrix}$ כצ״ל שלהם.

אנחנו יודעים כי לפי השלישי חינם מספיק לנו להראות ששלושת הווקטורים הם בת״ל ואז היות והמימד של $\mathbb{R}^3$ הוא 3 ולכן מספיק להראות שהווקטורים הם בת״ל. אולם ישנה עוד דרך : לפי משפט מהכיתה מספיק להראות שכל ווקטור ניתן להציג כצ״ל יחיד של איברי הבסיס.

ולכן אם נחפש את הצ״ל של הוקטור $v=\begin{Bmatrix}6\\9\\14\end{Bmatrix}$ נחבר את המטריצה הבאה : $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\1&1&2&9\\1&2&3&14\end{array}\right]$ ונראה כי קיים צ״ל יחיד המקיים זאת ואז נסיק כי הווקטורים אינם ת״ל ונמצא יחד עם זאת את הצירוף הליניארי שלהם עבור הווקטור v.

נבצע :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\1&1&2&9\\1&2&3&14\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&0&1&3\\0&1&2&8\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&2&8\\0&0&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-3R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right]\xrightarrow[R_1-R_3]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right].$$

קיבלנו את הצירוף הליניארי הבא : $v=v_1+2v_2+3v_3$, כלומר קיבלנו שקיים צ״ל יחיד שייתן לנו את הווקטור המבוקש ולכן הקבוצה הנ״ל היא בסיס.

יש לציין כי במקום זאת היינו יכולים לבדוק אם הווקטורים הם בת״ל ע״י פתרון המערכת : $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&2&0\\1&2&3&0\end{array}\right]$ כשהיינו מדרגים היינו מקבלים :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&2&0\\1&2&3&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-3R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_1-R_3]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

מה שאומר שהוקטורים הם אכן בת״ל ולכן לפי השלישי חינם – בסיס.

2. מצאו בסיס ומימד לתתי המרחבים הבאים :

א. $sp=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $sp=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\5\\5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

<u>פתרון</u>

יש למצוא בסיס ומימד לשני תתי המרחב הבאים :

א. $sp=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ ב. $sp=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\5\\5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

א. נדרג את המטריצה ששורותיה הם הוקטורים :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\2&1&1&0\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\0&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\leftarrow R_2-2R_1\\R_3\leftarrow R_3-R_1\\R_4\leftarrow R_4-R_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&1&1&2\\0&2&3&5\\0&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_3\leftarrow R_3-R_2\\R_4\leftarrow R_4-2R_2\\R_5\leftarrow R_5-R_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_3\leftarrow R_3-R_2\\R_4\leftarrow R_4-2R_2\\R_5\leftarrow R_5-R_1}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\leftarrow R_5-R_4}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

רואים שבהחלפת שורות אנחנו מגיעים לצורה מדורגת ולכן הוקטורים בת״ל ומהוים בסיס למרחב

ולכן הבסיס הוא : $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ולכן המימד : $\dim=3$.

ב. נבצע את אותן הפעולות ונקבל :

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&-1&-1&-1\\2&2&0&0&-1\\1&1&5&5&2\\1&-1&-1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\leftarrow R_2-R_1\\R_3\leftarrow R_3-2R_1\\R_4\leftarrow R_4-R_1\\R_5\leftarrow R_5-R_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&4&4&2\\0&-2&-2&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_3\leftarrow R_3-R_2\\R_4\leftarrow R_4+2R_2}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-2&-2&-2&0\end{pmatrix}$$

רואים שבהחלפת שורות אנחנו מגיעים לצורה מדורגת ולכן הוקטורים בת״ל ומהוים בסיס למרחב

ולכן הבסיס הוא : $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$

והמימד הוא : $\dim=3$.

3. מצאו בסיס ומימד עבור הקבוצות הבאות

א. $V_1=\left\{A_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}\,\middle|\,A=A^T\right\}$.

ב. $V_2=\left\{A_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}\,\middle|\,A=-A^T\right\}$.

<u>פתרון</u>

יש למצוא בסיס ומרחב עבור הקבוצות הבאות :

א. $V_1=\left\{A_{n\times n}\in \mathbb{R}^{n\times n}\,\middle|\,A=A^T\right\}$. כל מטריצה סימטרית נראית כך: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

במטריצה סימטרית במידות $n\times n$ יש צורך ב- n מטריצות אלמנטריות עבור האלכסון הראשי ועוד: $\frac{n^2-n}{2}$ מטריצות אלמנטריות עבור הפרישה של חצי מאיברי המטריצה. (יש n^2 איברים, כאשר נוריד את n האיברים שבאלכסון הראשי נקבל כי יש n^2-n איברים ומכיוון שהמטריצה סימטרית אנו צריכים רק את אחד הצדדים של האלכסון ולכן נחלק ב-2).

ממילא כי בסיס לקבוצה זו מכיל $\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ מטריצות אלמנטריות.

המימד של קבוצה זו הוא: $\dim=n^2-\frac{n^2+n}{2}=\frac{n^2-n}{2}$.

ב. $V_2=\left\{A_{n\times n}\in \mathbb{R}^{n\times n}\,\middle|\,A=-A^T\right\}$. כאן המקרה הוא טיפה יותר מסובך היות ו $A=-A^T$ ז"א שכל מטריצה צריכה לקיים את השוויון הבא: $-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=A^T$ מה שאומר שכל איברי האלכסון

חייבים להיות =0. .... לכן כל מטריצה שנמצאת שם תראה כך: $\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & & & 0 \end{pmatrix}$

קבוצת המטריצות האנטי-סימטריות מתנהגות באופן זהה לעניין הבסיס והמימד כמו מקודם ולכן כרגע אין צורך ב מטריצות עבור האלכסון הראשי אלא רק עבור הצדדים, כלומר $\frac{n^2-n}{2}$ מטריצות אלמנטריות עבור הפרישה של חצי מאיבריה.

ולכן הבסיס יראה כך: $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\cdots\cdots\right\}$

4. יהי V מרחב וקטורי, הוכיחו כי $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס למרחב V $\Leftrightarrow$ $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס גם בסיס למרחב V.

<u>**פיתרון**</u>

יש להוכיח כי: $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס $\Leftrightarrow$ $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס.

<u>נוכיח בכיוון אחד:</u>

נתון כי: $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס ז"א שכל הווקטורים הם בת"ל ולכן המשוואה: $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+.....+\alpha_nv_n=0$ נכונה רק עבור: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=.....=\alpha_n=0$.

כעת נניח בשלילה כי הקבוצה: $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ תלויה ליניארית, דהיינו קיים צירוף לא טריוויאלי המקיים את: $\beta_1(v_1+v_2)+\beta_2(v_1-v_2)+\beta_3v_3+.....+\beta_nv_n=0$.

לאחר סידור נקבל: $v_1(\beta_1+\beta_2)+v_2(\beta_1-\beta_2)+\beta_3v_3+.....+\beta_nv_n=0$ ומכיוון שנתון כי הווקטורים $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ הם בת"ל הרי שקיים רק הפתרון טריוויאלי והוא: $\beta_1+\beta_2=\beta_1-\beta_2=\beta_3=...=\beta_n=0$ ולכן בפרט: $\beta_1=\beta_2=0$.

לכן גם הקבוצה $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ היא בת"ל.

מכיוון שהקבוצה $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ נתונה כבסיס הרי שהיא מכילה את כמות הווקטורים המינימלית הפורשת את המרחב. כלומר היא מכילה את אותו מס וקטורים כמו המימד של המרחב.

כעת גם בקבוצה $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ קיים אותו מספר הווקטורים ולכן ניתן לומר שגם היא בסיס לאותו המרחב. לפי משפט השלישי חינם.

<u>נוכיח בכיוון שני:</u>

נתון כי: $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס ז"א שכל הווקטורים הם בת"ל.

לכן המשוואה: $\alpha_1(v_1+v_2)+\alpha_2(v_1-v_2)+\alpha_3v_3+.....+\alpha_nv_n=0$ נכונה רק עבור: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=.....=\alpha_n=0$.

כעת נניח בשלילה כי הקבוצה: $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ תלויה ליניארית, דהיינו קיים צירוף לא טריוויאלי המקיים: $\beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3v_3+.....+\beta_nv_n=0$.

לאחר סידור של הנתון נקבל: $v_1(\alpha_1+\alpha_2)+v_2(\alpha_1-\alpha_2)+\alpha_3v_3+.....+\alpha_nv_n=0$.

מכיוון שהווקטורים $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ הם בת"ל הרי שקיים רק הפתרון טריוויאלי: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=...=\alpha_n=0$.

כעת מתקבל ממש: $\alpha_i=\beta_i \quad (1\le i\le n)$ ולכן גם הקבוצה $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ היא בת"ל.

מכיוון שהקבוצה $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ נתונה כבסיס הרי שהיא מכילה את כמות הווקטורים המינימלית הפורשת את המרחב.

כעת גם בקבוצה $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ קיים אותו מספר הווקטורים ולכן ניתן לומר שגם היא בסיס לאותו המרחב.

כמסקנה סופית נוכל לומר כי: $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס $\Leftrightarrow$ $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס.

5. מצאו בסיס למרחב הפתרונות של המערכת: $\begin{cases}x+y+z-w=0\\x+2y-3z=0\end{cases}$

<u>פתרון</u>

יש למצוא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת הבאה: $\begin{cases}x+y+z-w=0\\x+2y-3z=0\end{cases}$.

נכתוב מטריצה ונסדר לצורה קנונית: $\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&0\\1&2&-3&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&0\\0&1&-4&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1-R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&5&-2&0\\0&1&-4&1&0\end{array}\right]$.

ישנן שתי עמודות ציר ולכן יש שני משתנים תלויים ושני חופשיים.

נסמן: $z=t\ ,\ w=k$ ונקבל: $\begin{cases}x+5t-2k=0\\y-4t+k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2k-5t\\y=4t-k\end{cases}$.

מציב ונקבל: $\left\{t\begin{bmatrix}-5\\4\\1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}=\begin{Bmatrix}2k-5t\\4t-k\\t\\k\end{Bmatrix}$. כלומר הבסיס הוא הוקטורים: $\left\{\begin{bmatrix}-5\\4\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

6. א. הוכיחו את המשפט הבא:
יהיו שני תתי מרחב W ו- U ויהא ווקטור b המקיים את שתי המערכות אזי: $b\in W\bigcap U$.
מהנתונים נאמר כי: $b\in spanW$ וכן: $b\in spanU$.

ב. מצאו את מערכת המשוואות המגדירה את החיתוך של: $W_2=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $W_1=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

<u>פתרון</u>

א. נוכיח את המשפט הבא: יהיו שני תתי מרחב W ו- U ויהא ווקטור b המקיים את שתי המערכות אזי: $b\in W\bigcap U$.
מהנתונים נאמר כי: $b\in spanW$ וכן: $b\in spanU$.
בתרגיל הקודם (תרגיל מספר 6) הוכחנו כי מתקיים השוויון עבור שני **<u>תתי מרחב</u>**: $spanW\bigcap spanU=span\left(W\bigcap U\right)$.
<u>(שימו לב: שוויון זה אינו נכון עבור קבוצות אלא רק עבור מרחבים וקטורים !!!!)</u>
כעת נוכל לומר בפשטות על סמך שני הנתונים כי וודאי שמתקיים: $b\in span\left(W\bigcap U\right)$ ולכן הווקטור b מקיים את החיתוך של מערכות המשוואות וממילא: $b\in W\bigcap U$.
מש"ל.

ב. יש למצוא את מערכת המשוואות שמגדירה את החיתוך של: $W_2=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $W_1=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

נבצע: $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&2&2&b\\1&1&1&c\\0&1&2&d\end{array}\right]\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&2&2&b\\0&1&0&c-a\\0&-1&0&d-b\end{array}\right]\xrightarrow[R_4+R_3]{R_2-2R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&0&2&b-2c+2a\\0&1&0&c-a\\0&0&0&d-b+c-a\end{array}\right]$.

כלומר על מנת שלמערכת יהיה פיתרון צריך להתקיים ש: $d-b+c-a=0\Leftrightarrow c=b+a-d$,

כלומר ווקטור שנמצא ב W_1 נראה כך: $\begin{pmatrix}a\\b\\b+a-d\\d\end{pmatrix}$

ככל עבור W_2 נבצע: $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&e\\1&1&0&f\\0&1&1&g\\0&0&1&h\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&e\\0&1&0&f-e\\0&1&1&c\\0&0&1&d\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-R_4}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&e\\0&1&0&f-e\\0&1&0&g-h\\0&0&1&h\end{array}\right]$ ולכן:
$g-h=f-e\Leftrightarrow g=f-e+h$.

ולכן וקטור שנמצא ב W_2 נראה כך : $\begin{pmatrix} e \\ f \\ f-e+h \\ h \end{pmatrix}$.

ווקטור שנמצא בחיתוך, צריך לקיים את התנאים של שני תתי המרחב כלומר : $\begin{pmatrix} e \\ f \\ f-e+h \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b+a-d \\ d \end{pmatrix}$.

מהשוויון נקבל : $\left.\begin{matrix} a=e, \\ b=f, \\ d=h, \\ b+a-d=f-e+h \end{matrix}\right\} \Rightarrow b+a-d=b-a+d$

ולכן נקבל ש : $2a=2d$ כלומר $a=d$. ולכן נציב ונקבל : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}$ כלומר : $\left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

הבסיס הוא : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

שימו לב שהשתמשתי בכל אחד מתתי המרחב באותיות אחרות כי אחרת היות ואני עלולה להתבלבל בכל אחד מתתי המרחב האות היא שונה – לא מייצגת את אותו דבר ולכן חשוב להשתמש באותיות שונות !!!