תירגול 2

קבוצה היא אוסף של איברים בו אין משמעות לכפילות ולסדר.

נסמן קבוצה בסוגריים מסולסלים דוג':

- $A = \{1,2\} = \{1,1,2\} = \{2,1\}$.
- קבוצה ריקה $\phi = \{\}$.

נסמן $A \in a$ אם a איבר ב־A ו־ $a \notin A$ אם a לא איבר ב־A.

קבוצות חשובות

- $\mathbb{N}$־ קבוצת **המספרים הטבעיים**. $\{1,2,3,...\}$.
- $\mathbb{Z}$־קבוצת **המספרים השלמים** $\{...-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.
- $\mathbb{Q}$־קבוצת **המספרים הרציונליים**. קבוצת כל השברים, כל המספרים אשר ניתן להצגה כמנה של מספרים שלמים $\left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.
- $\mathbb{R}$־ קבוצת **המספרים הממשיים**. כוללת גם כן מספרים שאינם רציונליים כמו $\sqrt{2}, \pi$. נניח בשלילה $\sqrt{2}$ רציונלי אזי קיימים a,b זרים שלמים כך ש־

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \text{ even } \Rightarrow n \text{ even } \Rightarrow 4 \mid n^2 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow b \text{ even } \Rightarrow 2 \mid a,b.$$

הגדרה־ נאמר שהקבוצה A מוכלת בקבוצה B אם לכל $a \in A$ מתקיים $a \in B$ ומסמנים $A \subseteq B$.

הגדרה־ נאמר שקבוצה A שוה לקבוצה B אם יש להם אותם איברים תנאי שקול אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

הגדרה־ נאמר שקבוצות A,B זרות אם $A \cap B = \phi$.

תרגילים

1. $A = \{1,2,\{2\},3,\{2,3\}\}, B = \{2,3\}, C = \{1,3\}$ אילו מהטענות הבאות מתקיימות:

- $C \in A$. לא נכון.
- $C \subseteq A$. נכון
- $B \in A$. נכון
- $B \subseteq A$. נכון .
- $\{1\} \in A$. לא נכון.
- $\{\{2\}\} \subseteq A$.

- $A \in \phi$. לא נכון. קבוצה ריקה מוכלת בכול קבוצה אך אינה איבר בכל קבוצה, $\phi \in \{\phi, 2, 7\}$.
- $A \subseteq \phi$. נכון לכל $a \in \phi$ מתקיים $a \in A$.

2. הוכיחו כי:

$$\{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{2n+3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

פיתרון

נוכיח על ידי הכלה דו כיוונית, יהי $a \in \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ אזי $a = 2n+1 = 2(n-1) + 2 + 1 = 2(n-1) + 3$, אם $n \in \mathbb{Z}$ אזי גם $n-1 \in \mathbb{Z}$ ולכן $a \in \{2n+3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
מצד שני אם $a \in \{2n+3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ אזי $a = 2n+3 = 2n+2+1 = 2(n+1)+1$, אם $n \in \mathbb{Z}$ אזי גם $n+1 \in \mathbb{Z}$ ולכן $a \in \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.$\blacksquare$

הגדרה־ עבור קבוצות A, B נגדיר את הקבוצות הבאות:

- חיתוך של A, B ־ $A \cap B = \{x \mid x \in B \text{ and } x \in A\}$.
- איחוד של A, B ־ $A \cup B = \{x \mid x \in B \text{ or } x \in A\}$.
- הפרש בין A ל־B ־ $A \setminus B = \{x \mid x \notin B \text{ and } x \in A\}$.

אפשר לתאר את הפעולות בעזרת דיאגרמת ון.

דוגמאות:

$A = \{1, 3, a, 5, b\}$ $B = \{3, 7, 9, 1, c, a\}$.

1. $A \cup B$ פיתרון: $\{1, 3, a, 5, b, 7, 9, c\}$
2. $A \cap B$ פיתרון: $\{1, 3, a, 5\}$
3. $A \backslash B$ פיתרון: $\{5, a\}$

4. דיאגרמת ון 1. $A \cup B \subseteq A \cup C$ אבל $B \nsubseteq C$.
2. $A \cap B \subseteq A \cap B$ אבל $B \nsubseteq C$.

5. הוכח את התכונה הבאה (פילוג):

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

פיתרון:

$(\subseteq)$: יהי $x \in A \cup (B \cap C)$ אזי

$$x \in A \vee x \in (B \cap C) \quad \Rightarrow \quad x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

כעת יש שני מקרים: אם $x \in A$ אזי $x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ ולכן נמצא בחיתוך שזה צד ימין של המשוואה. אם $x \in B \wedge x \in C$ אזי $x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ ולכן נמצא בחיתוך שזה צד ימין של המשוואה.

($\supseteq$): יהי $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ אזי $x \in A \cup B$ וגם $x \in A \cup C$. באופן כללי יש שני מקרים או ש $x \in A$ או שלא. אם $x \in A$ הוא בצד שמאל וסיימנו. אחרת $x \notin A$, מחיבור עם הנתון נסיק כי $x \in C$ (כי הוא נמצא ב $x \in A \cup C$ ולא ב A) וגם $x \in B$ ולכן $x \in B \cap C$ ולכן שייך לצד שמאל של המשוואה וסימנו.

5. הוכח: אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז מקיים $B = C$.

פיתרון

$$B = B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$$

$$= (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C = C$$

אם יש זמן אפשר להוכיח גם כן בדרך של הכלה דו כיוונית.