אינפי' תשע"ט – תרגול 1

הבינום של ניוטון

נתחיל ממקרים פרטיים:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(הנוסחאות השניה והרביעית הן מקרה פרטי של הנוסחאות הראשונה והשלישית בהתאמה, כאשר מציבים $-b$ במקום b).

תרגיל: פתחו סוגריים בביטוי $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$.

פתרון:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3 =$$
$$(\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 =$$
$$3\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} =$$
$$9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$$

המקרה הכללי:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ באשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- יש מקש מיוחד במחשבון עבור נוסחה זו.
- כמו כן ניתן למצוא את המקדמים הבינומיים ע"י משולש פסקל (להדגים). את ההסבר לנכונות השיטה תראו בקורס מתמטיקה בדידה.

תרגיל: פתחו סוגריים לפי נוסחת הבינום של ניוטון:

1. $(a+b)^4$
2. $(a-b)^5$
3. $(x+3y^2)^5$
4. $(x^2-\frac{1}{x})^5$

פתרון: נמצא את המקדמים לפי משולש פסקל:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad .1$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \quad .2$$

$$\begin{aligned}(x+3y^2)^5 &= x^5 + 5x^4(3y^2) + 10x^3(3y^2)^2 + 10x^2(3y^2)^3 + 5x(3y^2)^4 + (3y^2)^5 = \\ &= x^5 + 15x^4y^2 + 10x^3(9y^4) + 10x^2(27y^6) + 5x(81y^8) + 243y^{10} = \\ &= x^5 + 15x^4y^2 + 90x^3y^4 + 270x^2y^6 + 405xy^8 + 243y^{10}\end{aligned} \quad .3$$

$$\begin{aligned}(x^2 - \tfrac{1}{x})^4 &= (x^2)^4 + 4(x^2)^3\tfrac{1}{x} + 6(x^2)^2\tfrac{1}{x^2} + 4x^2\tfrac{1}{x^3} + \tfrac{1}{x^4} = \\ &= x^8 - 4x^5 + 6x^2 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{1}{x^4}\end{aligned} \quad .4$$

כפל בצמוד

נשתמש בנוסחאות כפל מקוצר:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

תרגיל: כתבו את המספרים הבאים ללא שורש במכנה:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad .1$$

$$\frac{11\sqrt{5}}{4-\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{5}(4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})} = \frac{44\sqrt{5}+11\sqrt{15}}{13} \quad .2$$

תרגיל: היעזרו בכפל בצמוד כדי להביא את הביטויים הבאים לצורה ללא שברים:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+1}-2)} = \frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{x+1-4} = \frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{x-3} = \sqrt{x+1}+2 \quad .1$$

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}-1} &= \frac{(\sqrt{\sin x}+1)\cos^2 x}{(\sqrt{\sin x}+1)(\sqrt{\sin x}-1)} = \frac{(\sqrt{\sin x}+1)\cos^2 x}{\sin x-1} = \frac{(\sqrt{\sin x}+1)(1-\sin^2 x)}{\sin x-1} = \\ &= \frac{(\sqrt{\sin x}+1)(1-\sin x)(1+\sin x)}{-(1-\sin x)} = -(\sqrt{\sin x}+1)(1+\sin x)\end{aligned} \quad .2$$

$$\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8} = \sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4 \quad .3$$

חזרה על טכניקה אלגברית

<u>תרגיל:</u> פשטו את הביטוי הבא ככל הניתן:

$$\left(\frac{-5x^2-4x-2}{9x^2-1}+\frac{x-1}{3x+1}+\frac{2x+1}{3x-1}\right)\left(\frac{36x^2+24x+4}{4x^2+13x-12}\right)$$

<u>פתרון:</u>

נטפל קודם כל בסוגריים השמאליים: המכנה השמאלי מתפרק לפי כפל מקוצר ל-$(3x-1)(3x+1)$ לכן זהו המכנה המשותף ונקבל: $\frac{-5x^2-4x-2+(3x-1)(x-1)+(2x+1)(3x+1)}{(3x-1)(3x+1)}$ כלומר $\frac{x(4x-3)}{(3x-1)(3x+1)}$.

כעת נטפל בשבר הימני. המונה הוא $4(9x^2+6x+1)$ וע"י כפל מקוצר נקבל $4(3x+1)^2$.

במכנה: רוצים 2 מספרים שמכפלתם -48 וסכומם -13 כלומר הם $-16,3$ לכן הפתרונות הם $x_{1,2}=\frac{-16}{4},\frac{3}{4}=-4,\frac{3}{4}$. כלומר פירוק המכנה הוא $4(x+4)(x-\frac{3}{4})=(x+4)(4x-3)$.

כעת נוכל לכפול את שני השברים:

$$\frac{x(4x-3)}{(3x-1)(3x+1)}\frac{4(3x+1)^2}{(x+4)(4x-3)}=\frac{4x(3x+1)}{(3x-1)(x+4)}$$

<u>תרגיל:</u> פשטו את הביטוי הבא ככל הניתן:

$$\frac{n^4-m^4}{n^2-3nm+2m^2}\cdot\frac{n^2-nm-2m^2}{n^2+m^2}$$

<u>פתרון:</u>

I.

$$\frac{n^4-m^4}{n^2-3nm+2m^2}\cdot\frac{n^2-nm-2m^2}{n^2+m^2}=\frac{(n^2-m^2)(n^2+m^2)}{(n-2m)(n-m)}\cdot\frac{(n-2m)(n+m)}{n^2+m^2}=$$

$$=\frac{(n-m)(n+m)(n^2+m^2)}{(n-2m)(n-m)}\cdot\frac{(n-2m)(n+m)}{n^2+m^2}=(n+m)^2$$

<u>תרגיל:</u> פתרו את המשוואה $\sqrt{x+5}-\sqrt{8-x}=1$.

<u>פתרון:</u> תחום ההגדרה של המשוואה הוא $-5\le x\le 8$. נעביר אחד השורשים אגף (לא חובה) $\sqrt{x+5}=1+\sqrt{8-x}$ ונעלה בריבוע: $x+5=1+2\sqrt{8-x}+8-x$.

נבודד את השורש $\sqrt{8-x}=x-2$ והעלאה נוספת בריבוע תתן $x_{1,2}=-1,4$. שני הפתרונות בתחום הגדרה. כמו כן חובה לבדוק את הפתרונות בגלל פעולת ההעלאה בריבוע שאיננה הפיכה. הפתרון -1 נפסל וסה"כ הפתרון של המשוואה הוא $x=4$.

<u>תרגיל:</u> חשבו ללא מחשבון:

$$\frac{16^{16}18^{18}}{6^{36}2^{49}}$$

<u>פתרון:</u>

$$\frac{16^{16}18^{18}}{6^{36}2^{49}}=\frac{(2^4)^{16}(2\cdot 3^2)^{18}}{(2\cdot 3)^{36}2^{49}}=\frac{2^{64}\cdot 2^{18}\cdot 3^{36}}{2^{36}3^{36}2^{49}}=2^{64+18-36-49}3^{36-36}=2^{-3}=0.125$$

תרגיל: נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

פשטו את הביטוי הבא ככל הניתן:

$$\frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

פתרון:

$$\frac{f(x+a) - f(x)}{a} = \frac{\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}}{a} = \frac{\frac{x-(x+a)}{x(x+a)}}{a} = \frac{\frac{x-(x+a)}{x(x+a)}}{a} = \frac{-1}{x(x+a)}$$