סיכומון של מאפייני מטריצות והעתקות מיוחדות

הגדרה 1. מטריצה **נורמלית** מקיימת $A^*A = AA^*$, מטריצה נורמלית $\iff$ $\|Av\| = \|A^*v\|$.

- בנוסף מטריצה נורמלית מקיימת $\angle(Av, Au) = \angle(A^*v, A^*u)$.
- בהינתן מטריצה נורמלית, אם $Av = \lambda v$ אזי $A^*v = \overline{\lambda}v$.
- וקטורים עצמיים של ע"ע שונים מאונכים זה לזה.
- מטריצה משולשית ונורמלית היא אלכסונית.

הגדרה 2. מטריצה **אוניטרית** מקיימת $A^*A = AA^* = I$ $\iff$ $A^* = A^{-1}$, ניתן לראות שאוניטרית גורר נורמלית.

- תנאים שקולים: A אוניטרית $\iff$ $\|Av\| = \|v\|$ $\iff$ $\rho(Ax, Ay) = \rho(x, y)$ $\iff$ $\langle Av, Au\rangle = \langle v, u\rangle$
- A אוניטרית $\iff$ A מטריצת מעבר בין בסיסים או"נ $\iff$ עמודות המטריצה בסיס או"נ $\iff$ שורות המטריצה בסיס או"נ.
- כל ערך עצמי λ של המטריצה מקיים $|\lambda| = 1$.
- בנוסף A שומרת זווית $\angle(Av, Au) = \angle(v, u)$.
- מטריצה אוניטרית בהכרח הפיכה.
- מטריצה אוניטרית מעל הממשיים $(\mathbb{R})$ נקראת גם **אורתוגונלית**, נשים לב שעדיין שורותיה/עמודותיה/מעבר הבסיסים הוא עדיין אורתו**נורמלי**.
- מטריצה אורתוגונלית מקיימת את כל התכונות הנ"ל אך מעל הממשיים,למשל ע"ע λ מקיים $\lambda = \pm 1$.

הגדרה 3. מטריצה צמודה לעצמה(צל"ע) מקיימת $A^* = A$, ניתן לראות שצל"ע גורר נורמלית.

- מטריצה צמודה לעצמה מעל המרוכבים $(\mathbb{C})$ תיקרא **הרמטית**.
- מטריצה צמודה לעצמה מעל הממשיים $(\mathbb{R})$ תיקרא **סימטרית**, מכיוון שזו הגדרה שקולה(מעל $\mathbb{R}$), $A^* = A^t = A$.
- הערכים העצמיים של מטריצה צל"ע הם ממשיים.
- מעל הממשיים $(\mathbb{R})$ אם הפולינום האופייני מל"ל מטריצה סימטרית $\iff$ מטריצה נורמלית.