פתרונות לבוחן באינפי 88-132 תשפא

תרגיל 1. תהי $a_n=\sqrt{\sqrt{n^4+cn^3+2}+bn^2+n\left(n+a\right)}$

1. חשבו את $\lim\frac{a_n^2}{n^2}$
2. נתון ש-$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-3n\right)\in\mathbb{R}$ משמע קיים וסופי, חשבו את b
3. בהינתן הנתונים מהסעיפים הקודמים ובנוסף $\lim\left(a_n-3n\right)=6$ חשבו את a או c (תלוי מה הוגרל לכם)
4. חשבו את גבול הסדרה $b_n=\frac{n}{3n^2+5}+\frac{n}{3n^2+10}+\frac{n}{3n^2+15}+\ldots+\frac{n}{3n^2+5n}$

פתרון.
למה : במהלך התרגיל נשתמש מספר פעמים בטענה הבאה עבור סדרה חיובית המקיימת $\lim a_n=L$ מתקיים $\lim\sqrt{a_n}=\sqrt{L}$ לשם השלמות נוכיח גם אותה.
עבור $L>0$ יהי $\epsilon>0$ צריך למצוא N שהחל ממנו מתקיים

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right|<\epsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|<\epsilon$$

נשים לב ש-$\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|\leq\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{L}}\right|$ לכן מספיק לדרוש ש-

$$\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{L}}\right|<\epsilon$$
$$\Downarrow$$
$$|a_n-L|<\epsilon\sqrt{L}$$

כעת נתון שלכל $\epsilon'>0$ קיים N' שהחל ממנו מתקיים

$$|a_n-L|<\epsilon'$$

לכן אם נתבונן על $e'=\epsilon\sqrt{L}$ נוכל למצוא את ה-N הדרוש.
עבור המקרה של $L=0$ אני משאיר לכם.

1. בעזרת פיתוח אלגברי נקבל

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n^2} &= \\
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+cn^3+2}+bn^2+n(n+a)}{n^2} &= \\
\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{1+\frac{c}{n}+\frac{2}{n^4}}+b+1+\frac{a}{n}\right)}{n^2} &= \\
\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{c}{n}+\frac{2}{n^4}}+b+1+\frac{a}{n} &= 2+b
\end{aligned}$$

2. בעזרת פיתוח אלגברי נקבל

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(a_n-3n\right) &=\\
&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\sqrt{n^4+cn^3+2}+bn^2+n\left(n+a\right)}-3n\right) &=\\
&\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^4}}+b+1+\frac{a}{n}}-3\right)
\end{aligned}$$

בעזרת הלמה הביטוי $\sqrt{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^4}}+b+1+\frac{a}{n}}-3$ שואף ל-$\sqrt{2+b}-3$ משמע כדי שכל הגבול (כפול ה-n) יהיה סופי יש לדרוש ש-

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^4}}+b+1+\frac{a}{n}}-3\right)=0$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{2+b}-3=0$$
$$\Downarrow$$
$$b=7$$

3. נבצע הרחבה בצמוד ונקבל

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(a_n-3n\right) &=\\
&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\sqrt{n^4+cn^3+2}+7n^2+n\left(n+a\right)}-3n\right) &=\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+cn^3+2}+7n^2+n(n+a)-9n^2\right)}{\sqrt{\sqrt{n^4+cn^3+2}+7n^2+n(n+a)}+3n} &=\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{n^4+cn^3+2}+7n^2+n(n+a)}+3n}\left(\sqrt{n^4+cn^3+2}-\left(n^2-na\right)\right) &=\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{n^4+cn^3+2}+7n^2+n(n+a)}+3n}\frac{\left(n^4+cn^3+2-\left(n^2-na\right)^2\right)}{\sqrt{n^4+cn^3+2}+(n^2-na)} &=\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{n^4+cn^3+2}+7n^2+n(n+a)}+3n}\frac{(c+2a)n^3-a^2n^2+2}{\sqrt{n^4+cn^3+2}+(n^2-na)} &=\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{\sqrt{1+\frac{c}{n}+\frac{2}{n^4}}+7+1+\frac{a}{n}}+3\right)}\frac{n^3\left((c+2a)-\frac{a^2}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{c}{n}+\frac{2}{n^3}}+1-\frac{a}{n}\right)} &=\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{1+\frac{c}{n}+\frac{2}{n^4}}+7+1+\frac{a}{n}}+3}\frac{(c+2a)-\frac{a^2}{n}+\frac{2}{n^3}}{\sqrt{1+\frac{c}{n}+\frac{2}{n^3}}+1-\frac{a}{n}} &=\\
&\frac{1}{\sqrt{9}+3}\cdot\frac{(c+2a)}{\sqrt{1}+1}
\end{aligned}$$

אבל נתון שזה שווה ל-6 לכן נקבל שאמור להתקיים $c+2a=72$ בהתאם לנתון ניתן להסיק למה שווה a או c.

4. בעזרת הסנדוויץ נקבל שהביטוי

$$\frac{n}{3n^2+5}+\frac{n}{3n^2+10}+\frac{n}{3n^2+10}+\ldots+\frac{n}{3n^2+5n}$$

גדול מ-

$$\frac{n}{3n^2+5n}+\frac{n}{3n^2+5n}+\frac{n}{3n^2+5n}+\ldots+\frac{n}{3n^2+5n}$$

ששואף ל-$\frac{1}{3}$ מצד שני הוא קטן מ-

$$\frac{n}{3n^2+5}+\frac{n}{3n^2+5}+\frac{n}{3n^2+5}+\ldots+\frac{n}{3n^2+5}$$

שגם כן שואף ל-$\frac{1}{3}$ לכן לפי הסנדוויץ נקבל שהגבול הוא $\frac{1}{3}$

תרגיל 2. תהי סדרה המקיימת לכל n טבעי כי $\begin{cases} a_{n+1}=-5a_n^2+20a_n-18 \\ a_1=c \end{cases}$

1. חשבו את גבול הסדרה עבור ערך נתון של a_1
2. חשבו את גבול הסדרה עבור תחום נתון של ערכים.
3. חשבו את קבוצת כל הגבולות האפשריים לסדרה.

פתרון.

1. נחקור את נוסחאת הנסיגה הזאת:

- מונו:

$$\begin{gathered} a_{n+1}>a_n \\ \Downarrow \\ -5a_n^2+20a_n-18>a_n \\ \Downarrow \\ 1.8<a_n<2 \end{gathered}$$

כלומר אם $a_n>2$ או $a_n<1.8$ נקבל שהאיבר הבא קטן יותר $(a_{n+1}<a_n)$, בעוד שאם $1.8<a_n<2$ אז האיבר הבא גדול יותר $a_{n+1}>a_n$, ואם $a_n=1.8$ או $a_n=2$ נקבל סדרה קבועה

- חסימות: נראה ש-$a_{n+1}\le 2$ כלומר

$$\begin{gathered} a_{n+1}\le 2 \\ \Downarrow \\ -5a_n^2+20a_n-18\ \le\ 2 \\ \Downarrow \\ -5\left(a_n-2\right)^2\le 0 \end{gathered}$$

קבלנו פסוק אמת.

החל מ-$n=2$ נקבל ש-$a_n\le 2$ ובמידה ויהיה איזה n_0 (עבור c שהיו נתונים בשאלה זה היה עבור $n_0=2$) שעבורו

$$1.8<a_{n_0}<2$$

אנחנו נקבל האיבר הבא גדול יותר אך עדיין קטן מ-2 משמע

$$1.8<a_{n_0}\le a_{n_0+1}<2$$

כלומר הסדרה חסומה ומונו לכן מתכנסת, והגבול יוצא 2.

2. נמצא לכל ערך של c את הגבול:

- אם $c<1.8$ ניתן לראות שהסדרה מונו יורדת לכן מתכנסת במובן הרחב, אבל המידה יש לה גבול סופי הוא יכול להיות רק 1.8 או 2 לכן במקרה זה הגבול חייב להיות במובן הרחב משמע $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$
- עבור $a_1=c\ge 1.8$ צריך לבחון למה שווה a_2 היות והוכחנו ש-$a_2\le 2$ בלי תלות ב-c, יתכנו מספר אופציות:

+ $a_2 < 1.8$ גבול הסדרה יהיה $-\infty$ בדומה לסעיף הקודם, מקרה זה מתקיים כאשר

$$-5a_1^2 + 20a_1 - 18 < 1.8$$
$$\Downarrow$$
$$a_1 < 1.8 \vee a_1 > 2.2$$

+ $a_2 = 1.8$ נקבל סדרה קבועה, ולכן הגבול יהיה 1.8, מקרה זה מתקיים כאשר $a_1 = 2.2, 1.8$
+ $1.8 < a_2$ נקבל מונו עולה שגבול 2, מקרה זה מתקיים עבור $1.8 < a_1 < 2.2$

לסיכום:

c	a_2	$\lim a_n$
$c < 1.8$	$a_2 < 1.8$	∞
$c > 2.2$	$a_2 < 1.8$	$-\infty$
$c = 1.8, 2.2$	$a_2 = 1.8$	1.8
$1.8 < c < 2.2$	$1.8 < a_2 \leq 2$	2

תרגיל 3. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+28n+195}$

פתרון.

1. בעזרת שברים חלקיים נקבל

$$\frac{2}{n^2+28n+195} = \frac{1}{n+15} - \frac{1}{n+17}$$

לכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+28n+195} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+15} - \frac{1}{n+17}$$

כעת נתבונן בססח של הטור

$$S_n =$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$
$$\left(\frac{1}{1+15} - \frac{1}{1+17}\right) + \left(\frac{1}{2+15} - \frac{1}{2+17}\right) + \left(\frac{1}{3+15} - \frac{1}{3+17}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1+15} - \frac{1}{n-1+17}\right) + \left(\frac{1}{n+15} - \frac{1}{n+17}\right) =$$
$$\frac{1}{1+15} + \frac{1}{2+15} - \frac{1}{n-16} - \frac{1}{n+17}$$

והגבול של הססח הוא $\frac{1}{16} + \frac{1}{17} = \frac{33}{272}$