פתרון תרגיל 10 חדו"א 2 למורים באר שבע תש"ף

2 ביולי 2020

1. נשים לב: $f=(x+1)^{\frac{1}{2}}$, לכן הנגזרות הן:

$$f'=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\,,\ f''=-\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}\,,\ f'''=\frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}}$$

ובנקודה $x=0$:

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{2},\ f''(0)=-\frac{1}{4},\ f'''0=\frac{3}{8}$$

לכן:

$$f=\sqrt{1+x}\approx p_3(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

ולכן:

$$\sqrt{2}=\sqrt{1+1}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{23}{16}$$

2. מהטור הידוע: $e^x=\sum\frac{x^n}{n!}$ נקבל:

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\Longrightarrow e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

זהו טור מתחלף, ולכן השגיאה קטנה יותר מהאיבר הבא - עבור $n=7$ אנחנו מקבלים ש: $\left|\frac{(-1)^n}{n!}\right|<0.001$, ולכן נחשב עד $n=6$:

$$e^{-1}\approx\sum_{n=0}^{6}\frac{(-1)^n}{n!}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx 0.368$$

3. מהטור הידוע: $e^x=\sum\frac{x^n}{n!}$ נקבל:

$$f(x)=x^2e^x=x^2\sum\frac{x^n}{n!}=\sum\frac{x^{n+2}}{n!}$$

כעת, אנחנו יודעים שהמקדם של x^5 הוא $\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$; בטור שקיבלנו המקדם של x^5 הוא $\frac{1}{3!}$ ולכן: $\frac{1}{3!} = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}$ כלומר: $f^{(5)}(0) = 20$. באופן דומה, $\frac{1}{8!} = \frac{f^{(10)}(0)}{10!}$ ולכן $f^{(10)}(0) = 90$.

4. בדומה לשאלה הקודמת, כאן:

$$f(x) = \sum \frac{x^{n+2}}{n!} + \sum \frac{x^n}{n!}$$

כאן המקדמים של x^5, x^{10} הם $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}, \frac{1}{8!} + \frac{1}{10!}$ ולכן:

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \Longrightarrow f^{(5)}(0) = 21$$

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{1}{8!} + \frac{1}{10!} \Longrightarrow f^{(10)}(0) = 91$$