פתרון תרגיל 7 אנליזה הרמונית תשע"ח

1.א. $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ איננה מכפלה פנימית על המרחב $E[0,1]$, מכיוון שתכונת האי-שליליות לא מתקיימת. הדגמנו זאת בתרגול. למשל, עבור הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x\neq 0 \end{cases}$$

זו פונקציה רציפה למקוטעין וכמובן $f\neq 0$, אך:

$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx = 0$$

ב. הטענה די הגיונית, בואו נרשום את זה יפה.

תהי $\{x_1,\ldots,x_n\}$ קבוצת הנקודות שבהן $f_1\neq f_2$ ותהי $\{y_1,\ldots,y_m\}$ קבוצת הנקודות שבהן $g_1\neq g_2$.

כעת, לכל $x\notin\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\}$ מתקיים: $f_1(x)=f_2(x)\,,\ g_1(x)=g_2(x)$, ולכן גם:

$$af_1(x)+bg_1(x)=af_2(x)+bg_2(x)$$

כלומר, הפונקציות af_1+bg_1, af_2+bg_2 שונות זו מזו לכל היותר ב$-m+n$ נקודות (הנקודות $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$) ולכן שקולות.

כעת, אפשר לומר שהפונקציות $f_1 - f_2,\ g_1 - g_2$ שקולה ל-0, ולכן:

$$0 = \langle f_1 - f_2, g_2 \rangle$$
$$0 = \langle f_1 - f_2, g_1 \rangle$$
$$0 = \langle g_1 - g_2, f_1 \rangle$$

וגם $0 = \langle g_1 - g_2, f_2 \rangle$. אם פותחים את כל ארבעת השוויונות לפי הליניאריות של מכפלה פנימית מקבלים את הדרוש.

ג. תהי f רציפה למקוטעין. נסמן ב$-x_1, \ldots, x_n$ את נקודות אי-הרציפות של f.

אנו יודעים שבפונקציה רציפה למקוטעין הגבולות החד צדדיים בכל נקודה קיימים ושווים, ולכן - כדי שתהיה מנורמלת - "נתקן" את הפונקציה באופן הבא. נסמן את הפונקציה המנורמלת $\tilde{f}$.

בכל אחת מהנקודות $x_1, \ldots, x_n$ נגדיר:

$$\tilde{f}(x_i) = \frac{1}{2}\left(f\left(x_i^+\right) + f\left(x_i^-\right)\right)$$

בקצוות הקטע, נגדיר $\tilde{f}(0) = f(0^+), \tilde{f}(1) = f(1^-)$.

לכל x אחר נגדיר $\tilde{f}(x) = f(x)$.

כעת, $\tilde{f}$ מנורמלת ושקולה ל$-f$, כי היא שונה ממנה בנקודות $x_1, \ldots, x_n, 0, 1$ לכל היותר.

למה $\tilde{f}$ יחידה? נניח שיש עוד פונקציה מנורמלת ששקולה ל$-f$, אסמן אותה ב$-\psi$ (כי אני יכול). נראה שזו אותה פונקציה כמו $\tilde{f}$.

$\tilde{f}$ ו$-\psi$ שקולות זו לזו (כל אחת מהן שונה מ$-f$ במספר סופי של נקודות ולכן הן שונות זו מזו במספר סופי של נקודות. לחלופין, שקילות פונקציות היא יחס שקילות ויחס שקילות הוא טרנזיטיבי).

בכל נקודה $x \in (0,1)$, מתקיים: $\psi(x^+) = \tilde{f}(x^+),\ \psi(x^-) = \tilde{f}(x^-)$ (כי השוני הוא רק במספר סופי של נקודות ולא יכול לשנות את הגבולות) ולכן:

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\psi\left(x_i^+\right) + \psi\left(x_i^-\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}\left(x_i^+\right) + \tilde{f}\left(x_i^-\right)\right) = \tilde{f}(x)$$

המעבר הראשון נכון כי ψ מנורמלת והמעבר השלישי נכון כי $\tilde{f}$ מנורמלת.

בקצוות, מכיוון ששתי הפונקציות $\psi, \tilde{f}$ שקולות ל$-f$ נקבל: $\psi(0) = f(0^+) = \tilde{f}(0)\ ,\ \ \psi(1) = f(1^-) = \tilde{f}(1)$.
סה"כ, לכל $x \in [0,1]$ קיבלנו $\psi(x) = \tilde{f}(x)$ וזו אותה הפונקציה.

כעת, אנו יודעים שמרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין הוא מרחב וקטורי.
לכן, כדי להראות שאוסף הפונקציות המנורמלות שנסמן ב$-$ $E_N[0,1]$ הוא מרחב וקטורי, מספיק להראות שהתנאים של הקריטריון המקוצר לתת-מרחב מתקיימים.

1. 0 היא פונקציה מנורמלת (כל פונקציה רציפה היא מנורמלת, חשבו מדוע) ולכן $0 \in E_N[0,1]$.

2. לכל $f, g \in E_N[0,1]$ ולכל סקלר α יש להראות שגם $\alpha f + g \in E_N[0,1]$, אך מאריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$(\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) = \alpha\left(\frac{1}{2}\left(f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right)\right) + \frac{1}{2}\left(g\left(x^+\right) + g\left(x^-\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha f\left(x^+\right) + g\left(x^+\right) + \alpha f\left(x^-\right) + g\left(x^-\right)\right) = \frac{1}{2}\left((\alpha f + g)\left(x^+\right) + (\alpha f + g)\left(x^-\right)\right)$$

והפונקציה $\alpha f + g$ אכן מנורמלת. לכן $E_N[0,1]$ אכן מרחב וקטורי.

כעת, כדי להראות ש: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ היא אכן מכפלה פנימית על $E_N[0,1]$, נראה שהתכונות הדרושות ממ"פ מתקיימות.
יתרה מזו, אנחנו יודעים שהליניאריות וההרמיטיות מתקיימות (בגלל האינטגרל בהגדרה של המ"פ, הראנו זאת בתרגול), והתכונה ה"בעייתית" שצריך להוכיח שמתקיימת היא תכונת האי-שליליות.
גם כאן אפשר לדייק; מהגדרת המכפלה אנו רואים שלכל $f \in E_N[0,1]$ מתקיים: $\langle f, f\rangle \geq 0$ ושאם $f = 0$ אז $\langle f, f\rangle = 0$, זה גם עובד עם פונקציות רציפות למקוטעין שהן לא מנורמלות.
מה שנשאר להוכיח, ושלא מתקיים בפונקציות רציפות למקוטעין באופן כללי (כפי שהדגמנו בתרגול ובסעיף א'), הוא שאם $\langle f, f\rangle = 0$ אז $f = 0$. לחלופין, אפשר להראות שאם $f \neq 0$ מנורמלת אז $\langle f, f\rangle > 0$.
אם כן, תהי $f \neq 0$ מנורמלת. לכן גם $\left|f^2\right| \geq 0$ מנורמלת (אפשר לראות זאת לפי אריתמטיקה של גבולות, בדומה לתנאי 2 בקריטריון לתת-מרחב שהוכחנו ממש בסעיף זה).
קיים $x_0 \in (0,1)$ כך שמתקיים: $f(x_0) \neq 0$, ולכן $\left|f^2(x_0)\right| > 0$.

מכיוון שהפונקציה מנורמלת, $\left|f^2\left(x_0\right)\right| = \frac{1}{2}\left(\left|f^2\left(x_0^+\right)\right| + \left|f^2\left(x_0^-\right)\right|\right)$, ואפשר לומר שאחד מהגבולות החד צדדיים בנקודה, נניח מימין, גדול ממש מ-0, כלומר:

$$\left|f^2\left(x_0^+\right)\right| > 0$$

.

לכן, מהגדרת הגבול, קיימת סביבה (ימנית) של x_0, $(x_0, x_0+\varepsilon)$, כך שלכל $x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$ מתקיים:

$$\left|f^2(x)\right| > \frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2}$$

.

כעת:

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 \left|f^2(x)\right| dx \geq \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \left|f^2(x)\right| dx \geq \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2} dx = \frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2} \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} dx$$

כלומר, נקבל:

$$\langle f, f\rangle \geq \frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2} \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} dx = \frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2}\varepsilon > 0$$

כנדרש. הוכחה זו של האי-שליליות דומה להוכחה שעשינו בכיתה על מרחב הפונקציות הרציפות.

אם כן, על מרחב הפונקציות המנורמלות זו אכן מכפלה פנימית.

לפני השאלות הבאות, נסביר בקצרה מהם טורי פורייה "כלליים".

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ונתבונן במערכת אורתונורמלית $\{e_i\}$ במרחב (מכיוון שאנו עוסקים במרחבים וקטוריים עם מימדים אינסופיים, יש הבדל מתמטי בין "בסיס" לבין "מערכת"; זה לא אמור להטריד אותנו).

לכל $v \in V$ אפשר להגדיר את מקדמי פורייה: $\langle v, e_i\rangle$ ובאמצעותם את טור פורייה:

$$\sum \langle v, e_i\rangle e_i$$

למשל, במרחב $E_N\left[-\pi,\pi\right]$ (פונקציות ממשיות) נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)g\left(x\right)dx$$

במרחב זה, הקבוצה: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\sin 3x,\dots\right\}$ היא מערכת אורתונורמלית, ולכן טור פורייה של f הוא:

$$\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle+\sum\left(\langle f,\cos nx\rangle\cos nx+\langle f,\sin nx\rangle\sin nx\right)$$

ולפי הגדרת המכפלה הפנימית זהו בדיוק טור פורייה ה"רגיל", שאנו מכירים.

באופן דומה בקטע $[a,b]$ אפשר להתבונן במערכת אורתונורמלית של סינוסים וקוסינוסים ולקבל את טור פורייה ה"רגיל".

אם נבחר מערכת אורתונורמלית שונה (ובוודאי אם נגדיר מכפלה פנימית שונה), טור פורייה $\sum\langle v,e_i\rangle e_i$ יהיה מן הסתם שונה מהטור ה"רגיל".

יתרה מזו, כשאנו רוצים לחשב קירוב טוב יותר של v, אנו יודעים שהכוונה היא להיטל האורתוגונאלי. ואיך מחשבים היטל אורתוגונאלי על תת-המרחב הנפרש על ידי $\{e_1,\dots,e_n\}$? באמצעות הנוסחה:

$$\tilde{v}=\sum_{i=1}^{n}\langle v,e_i\rangle e_i$$

כלומר, ההיטל האורתוגונאלי – הקירוב הטוב ביותר – הוא פשוט סכום חלקי של טור פורייה.

אם כן, בשאלה השנייה המערכת האורתונורמלית היא לא הסינוסים והקוסינוסים אלא פונקציות האר, ולכן הטור נקרא פורייה-האר. בשאלה השלישית המערכת האורתונורמלית היא פולינומי לז'נדר ולכן הטור נקרא פורייה-לז'נדר, ועל זו הדרך.

2. פונקציות האר מוגדרות באופן הבא. הפונקציה הראשונה במערכת היא 1, ולאחר מכן הפונקציות מוגדרות כך:

$$\psi_{n,k}=\begin{cases}\sqrt{2^{n-1}} & \frac{2k-2}{2^n}\le x<\frac{2k-1}{2^n}\\ -\sqrt{2^{n-1}} & \frac{2k-1}{2^n}\le x<\frac{2k}{2^n}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

כאשר n הוא מספר טבעי ולכל n, $k=1,2,\ldots,2^{n-1}$. למשל:

$$\psi_{4,7}=\begin{cases}\sqrt{8} & \frac{12}{16}\le x<\frac{13}{16}\\ -\sqrt{8} & \frac{13}{16}\le x<\frac{14}{16}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

המערכת $\{\psi_{n,k}\}$ היא מערכת אורתונורמלית. בדקו למשל שמתקיים: $\langle 1,\psi_{4,7}\rangle=0$ ושמתקיים: $\langle\psi_{4,7},\psi_{4,7}\rangle=1$.

המכפלה הפנימית היא הסטנדרטית:

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

מכיוון שהמערכת מאופיינת על ידי שני אינדקסים (האינדקס $n=1,2,\ldots$ והאינדקס k שתלוי ב־n), בטור יהיו שני סכומים, אחד לכל אינדקס.

כעת, נחשב את מקדמי פורייה-האר עבור $f(x)=x$. עבור הפונקציה הראשונה:

$$\langle x,1\rangle=\int\limits_0^1 x\cdot 1dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$$

ועבור שאר הפונקציות:

$$\langle x,\psi_{n,k}\rangle=\int\limits_0^1 x\cdot\psi_{n,k}dx=$$

הפונקציה $\psi_{n,k}$ מתאפסת ברוב הקטע, ונקבל:

$$=\int\limits_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}}\sqrt{2^{n-1}}xdx-\int\limits_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\frac{2k}{2^n}}\sqrt{2^{n-1}}xdx=\sqrt{2^{n-1}}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}}-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\frac{2k}{2^n}}\right)=$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^{n-1}} \left(\left(\frac{2k-1}{2^n} \right)^2 - \left(\frac{2k-2}{2^n} \right)^2 - \left(\frac{2k}{2^n} \right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2^n} \right)^2 \right)$$

ואם מסדרים, עם קצת רצון וקצת יכולת, מקבלים:

$$\langle x, \psi_{n,k} \rangle = -\sqrt{2^{-3n-1}}$$

אם כן, טור פורייה-האר של x נראה כך:

$$\frac{1}{2} + \sum_n \sum_k \left(-\sqrt{2^{-3n-1}} \right) \psi_{n,k}$$

אפשר להוציא את המינוס החוצה מהסכומים, ולשחק קצת עם המקדם והפונקציה (שניהם חזקות של 2).

כמו שהסברנו, הקירוב האופטימלי – ההיטל האורתוגונאלי של x – מתקבל פשוט כשלוקחים סכום חלקי:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(-\sqrt{2^{-3n-1}} \right) \psi_{n,k}$$

באופן דומה, אפשר לחשב את מקדמי פורייה-האר של x^2 ואת טור פורייה-האר שלה.

עבור הפונקציה הראשונה:

$$\left\langle x^2, 1 \right\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ועבור שאר הפונקציות:

$$\left\langle x^2, \psi_{n,k} \right\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot \psi_{n,k} dx = \int_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}} \sqrt{2^{n-1}} x^2 dx - \int_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\frac{2k}{2^n}} \sqrt{2^{n-1}} x^2 dx$$

$$= \sqrt{2^{n-1}} \left(\left. \frac{x^3}{3} \right|_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}} - \left. \frac{x^3}{3} \right|_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\frac{2k}{2^n}} \right) = \cdots = -\left(2k-1\right) \sqrt{2^{-(5n-1)}}$$

ולכן, טור פורייה-האר הוא:

$$\frac{1}{3} - \sum_n \sum_k \left(2k-1\right) \sqrt{2^{-(5n-1)}} \psi_{n,k}$$

והקירוב הטוב ביותר, כמו שהסברנו, הוא פשוט סכום חלקי.

3. בקטע $[-1,1]$, פולינומי לז'נדר שנסמן $P_n(x)$ הם מערכת אורתוגונאלית (ולא אורתונורמלית!). אפשר להציג את פולינומי לז'נדר בכמה דרכים.

דרך אחת היא נוסחת רודריגז (שם מגניב כמעט כמו עטייא):

$$P_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2-1\right)^n$$

דרך אחרת, מפורשת:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k}$$

כאשר $\left[\frac{n}{2}\right]$ הוא הערך השלם התחתון של $\frac{n}{2}$, ויש דרכים נוספות.

פולינומי לז'נדר הראשונים הם:

$$P_0 = 1,\ P_1 = x,\ P_2 = \frac{3x^2-1}{2}$$

עם זאת, הפולינומים לא נורמליים, אלא מקיימים: $\langle P_n, P_n\rangle = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$. מכיוון שאנו רוצים מערכת אורתונורמלית, את המקדם $\langle f, P_n\rangle$ נכפיל ב-$n+\frac{1}{2}$. אז למה לא לנרמל את הפולינומים מראש? זהו סיפור אחר ויסופר בפעם אחרת.

שוב, כמו עם פונקציות האר, תבדקו למשל שמתקיימים: $\langle P_1, P_2\rangle = 0$ וגם $\langle P_1, P_1\rangle = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$. כמו שאמרנו, פולינומי לז'נדר – עם הנרמול של כפל ב-$n+\frac{1}{2}$ – אכן מהווים מערכת אורתונורמלית.

חשוב לשים לב – ואפשר לראות זאת גם בפולינומים הראשונים – לפי ההצגה השנייה של הפולינומים, נקבל שכאשר n זוגי, הפולינום P_n הוא זוגי, וכאשר n אי-זוגי, הפולינום P_n אי-זוגי. מכיוון שהקטע סימטרי, זה יעזור בחישוב.

נתחיל עם הפונקציה $sgn(x)$. נזכור שמתקיים:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

וגם $sgn\left(0\right)=0$ אבל נקודה אחת לא קריטית בחישוב אינטגרלים.

הפונקציה אי-זוגית, ולכן לכל n זוגי:

$$\left\langle sgn\left(x\right),P_{n}\left(x\right)\right\rangle =\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\int\limits_{-1}^{1}sgn\left(x\right)P_{n}\left(x\right)dx=0$$

כי הפונקציה בתוך האינטגרל (מה שמכונה האינטגרנד) היא אי-זוגית.

ולכל n אי-זוגי:

$$\left\langle sgn\left(x\right),P_{n}\left(x\right)\right\rangle =\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\int\limits_{-1}^{1}sgn\left(x\right)P_{n}\left(x\right)dx=\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot2\int\limits_{0}^{1}sgn\left(x\right)P_{n}\left(x\right)dx$$

בקטע $\left(0,1\right)$, $sgn\left(x\right)=1$ ולכן:

$$=\left(2n+1\right)\int\limits_{0}^{1}P_{n}\left(x\right)dx$$

לפי ההצגה השנייה:

$$=\left(2n+1\right)\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{2^{n}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(-1\right)^{k}\left(2n-2k\right)!}{k!\left(n-k\right)!\left(n-2k\right)!}x^{n-2k}dx=$$

עם כל הכבוד לזוועה הזו, את כל המקדם אפשר להוציא החוצה, ולעשות אינטגרציה רק ל-x^{n-2k}. נקבל:

$$=\left(2n+1\right)\frac{1}{2^{n}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(-1\right)^{k}\left(2n-2k\right)!}{k!\left(n-k\right)!\left(n-2k\right)!}\cdot\left.\frac{x^{n-2k+1}}{n-2k+1}\right|_{0}^{1}=$$

כשמציבים $x=0$ הביטוי מתאפס, ולכן נישאר עם:

$$=\left(2n+1\right)\frac{1}{2^{n}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(-1\right)^{k}\left(2n-2k\right)!}{k!\left(n-k\right)!\left(n-2k\right)!}\cdot\frac{1}{n-2k+1}=\left(2n+1\right)\frac{1}{2^{n}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(-1\right)^{k}\left(2n-2k\right)!}{k!\left(n-k\right)!\left(n-2k+1\right)!}$$

וזהו המקדם בטור פורייה-לז'נדר. בפתרון של פרופסור שיף מציגים את הפולינומים באמצעות נוסחת רודריגז

(הדרך הראשונה), ואז צריך לחשב:

$$(2n+1)\int_0^1 P_n(x)\,dx=(2n+1)\int_0^1 \frac{1}{n!\cdot 2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n=\frac{2n+1}{n!\cdot 2^n}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\right)\Bigg|_0^1$$

האינטגרל והנגזרת "מבטלים" זה את זה, ולכן אנו נשארים עם הנגזרת ה-$n-1$.

ננסה להבין מה קורה כשמציבים בנגזרת הזו 0 ומה קורה כשמציבים 1.

מכיוון שאנו גוזרים $\left(x^2-1\right)^n$ "רק" $n-1$ פעמים, כשנציב $x=1$ כל אחד מהגורמים בנגזרת ה-$n-1$ יתאפס.

אולי למדתם את זה במרוכבות - לפונקציה $\left(x^2-1\right)^n$ יש אפס מסדר n בנקודה $x=1$, ולכן כל הנגזרות שלה עד לסדר $n-1$ מתאפסות בנקודה $x=1$.

מה קורה כשמציבים $x=0$? נפתח את $\left(x^2-1\right)^n$ באמצעות בינומא דניוטון:

$$\left(x^2-1\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^2\right)^k(-1)^{n-k}$$

אם גוזרים $n-1$ פעמים, כל האיברים שהמעלה שלהם קטנה מ-$n-1$ יתאפסו.

מצד שני, בכל האיברים שהמעלה שלהם גדולה מ$n-1$, יישאר x^i עבור $i>0$ כלשהו וכשנציב $x=0$ הם גם יתאפסו.

אז מי נשאר? האיבר שהמעלה שלו היא בדיוק $n-1$. מי המקדם שלו בסכום?

המעלות של x בסכום הם $2k$, ולכן נשווה: $2k=n-1$ ולכן האיבר המתאים הוא זה המתקבל כאשר $k=\frac{n-1}{2}$

(זכרו ש$-n$ הוא אי-זוגי).

אם כן, נציב $k=\frac{n-1}{2}$ בסכום ונקבל את המקדם:

$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cdot(n-1)!\cdot(-1)^{n-\frac{n-1}{2}}$$

ה$-(n-1)!$ צץ פתאום כי גזרנו את x^{n-1} $n-1$ פעמים.

אם כן, אם פותחים את המקדם הבינומי וקצת מסדרים מקבלים בסך הכל:

$$(2n+1)\int_0^1 P_n(x)\,dx=\frac{2n+1}{n!\cdot 2^n}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\right)\Bigg|_0^1=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)(n-1)!}{2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

עבור n אי-זוגי, ועבור n זוגי מקבלים 0 כמו שהסברנו.

עבור $f(x)=|x|$, מכיוון שהפונקציה זוגית, נקבל שעבור n אי-זוגי:

$$\langle |x|, P_n(x)\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\int_{-1}^{1}|x|\,P_n(x)\,dx = 0$$

כי הפונקציה בפנים אי-זוגית, ועבור n זוגי:

$$\langle |x|, P_n(x)\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\int_{-1}^{1}|x|\,P_n(x)\,dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 2\int_{0}^{1}xP_n(x)\,dx$$

בהצגה השנייה:

$$(2n+1)\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}dx =$$

ומחשבים כמו קודם. בפתרון של פרופסור שיף מציגים את הפולינומים באמצעות נוסחת רודריגז (הדרך הראשונה), ומקבלים שהמקדמים הם:

$$\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}(2n+1)(n-2)!}{2^n\left(\frac{n}{2}+1\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}$$

כאשר n זוגי, וכאשר n אי-זוגי מקבלים 0 כמו שהסברנו.

4. נסמן ב־ a_n את המקדמים של $sgn(x)$ מהשאלה הקודמת, לפי ההצגה הראשונה (כמו של פרופסור שיף). אנחנו רוצים להראות שמתקיים: $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

אינטואיטיבית, הכוונה היא שכאשר $n\longrightarrow\infty$, המהירות שבה a_n ו־$\frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפים לאפס היא זהה (יש שאיפה לאפס כי זה טור פורייה והמקדמים שואפים לאפס אחי) ואפשר לסמן $a_n\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$.

במעט יותר דיוק, אנחנו רוצים להסביר למה קיים מספר $0<L<\infty$ כך שמתקיים:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right| = L$$

ובכן, a_n מערב בתוכו הרבה עצרת ולכן אנחנו רוצים להשתמש בנוסחת סטרלינג, שאומרת: $k!\sim\sqrt{2\pi}k^{k+\frac{1}{2}}e^{-k}$

(איך ה$-e$ וה$-\sqrt{2\pi}$ צצים להם בכל מיני חורים).

אם נסדר זאת מעט, נקבל: $k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$.

לכן:

$$a_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)(n-1)!}{2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \sim \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

נפלא. בואו נסדר; משהו בחזקת $\frac{1}{2}$ הוא משהו בשורש, ואפשר לסדר:

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\sqrt{\pi(n+1)}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt{\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}} =$$

לאט-לאט. מה קורה עם ה-2 שנמצאים במכנה? יש לנו בסה"כ: $2^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^n$, והם מצטמצמים עם ה$-2^n$ מהשבר השמאלי.

מה קורה עם ה$-e$? במונה יש e^{n-1}, במכנה יש $e^{\frac{n+1}{2}} \cdot e^{\frac{n-1}{2}} = e^n$, מה שמשאיר לנו בסה"כ e.

$\sqrt{\pi(n-1)}$ שבמכנה מצטמצם עם זה שבמונה.

במונה יש $(n-1)^{n-1}$ ובמכנה יש $(n-1)^{\frac{n-1}{2}}$, וזה משאיר אותנו עם $(n-1)^{\frac{n-1}{2}}$ במונה.

לסיכום ביניים, אנחנו נשארים עם:

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1) \cdot \frac{\sqrt{2}e(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi(n+1)}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}} =$$

כעת, $(n+1)^{\frac{n+1}{2}} = (n+1)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{n+1}$, וכך גם $(n-1)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n-1}}$. נקבל:

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}e \cdot \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)\cdot(n+1)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{n-1}}$$

כעת, $\frac{2n+1}{n+1} \sim 2$.

כמו כן:

$$\frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n} \sim \sqrt{\frac{e^{-1}}{e}} = e^{-1}$$

המעבר $\sim$ נובע מכך שאנו יודעים (בטח יודעים) שמתקיים: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sim e^{-1}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$. נחזור למקדם

ונקבל:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}e\cdot\frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)\cdot(n+1)^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{n-1}}\sim\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}2e\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{e\sqrt{n-1}}$$

לבסוף, $\sqrt{n-1}\sim\sqrt{n}$, ולכן נקבל:

$$\sim\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}2\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$$

כמו שרצינו.

באופן דומה, אם נסמן ב$-b_n$ את המקדמים בטור פורייה-לז'נדר של $|x|$ שמצאנו בשאלה הקודמת, נמיר את הערצת באמצעות נוסחת סטרלינג ונעבוד קצת, נקבל $b_n=O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

כעת, $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ שואף ל-0 "מהר יותר" מ$-\frac{1}{\sqrt{n}}$.

לפי מה שראינו עכשיו, פירוש הדבר שהמקדמים b_n של $|x|$ שואפים ל-0 מהר יותר מהמקדמים a_n של $sgn\left(x\right)$.

מה עומד מאחורי עובדה זו?

ובכן, אם נבצע אינטגרציה על $sgn\left(x\right)$ נקבל את $|x|$. כמו שהסברנו בתרגול, מה עושה אינטגרציה למקדמים של הטור? מחלקת אותם ב$-n$; זה נכון בטור פורייה הרגיל וזה נכון גם בטור פורייה-לז'נדר.

כלומר, המקדם של $|x|$ מתנהג כמו המקדם של $sgn\left(x\right)$ שחילקנו ב$-n$, ובסימונים של התרגיל הזה פירוש הדבר שמתקיים: $b_n\sim\frac{a_n}{n}$.

אכן, ראינו שמתקיים: $b_n\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\ a_n\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ ואכן $b_n\sim\frac{a_n}{n}$.

לסיכום, כמו שאמרנו בתרגול: אינטגרציה מגדילה את מהירות התכנסות המקדמים ל-0, נגזרת מקטינה אותה.

5. פולינומי צ'בישב מוגדרים כך: $T_n\left(\cos\theta\right)=\cos n\theta$. אפשר למצוא נוסחאות מפורשות לפולינום, כמו למשל $T_n\left(x\right)=\cos\left(n\arccos x\right)$, אבל הנוסחה הראשונה מספיקה לנו.

ראשית, אנחנו רוצים להראות שהפולינומים אורתוגונאליים. כלומר, אם $m\neq n$ אז $\langle T_n\left(x\right),T_m\left(x\right)\rangle=0$. לפי הגדרת המכפלה הפנימית במקרה זה, נקבל:

$$\langle T_n\left(x\right),T_m\left(x\right)\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{T_n\left(x\right)T_m\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

שוב, אנחנו לא יודעים לטפל ב$-$ $T_n\left(x\right)$ אלא ב$-$ $T_n\left(\cos\theta\right)$. לכן, נציב $x=\cos\theta$.

נקבל $dx=-\sin\theta d\theta$. $\cos\pi=-1$, $\cos0=1$ והגבולות ישתנו בהתאם:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n\left(x\right)T_m\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{T_n\left(\cos\theta\right)T_m\left(\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\left(-\sin\theta d\theta\right)=$$

כעת, $\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta}=\sin\theta$, כי בתחום $0\leq\theta\leq\pi$ הסינוס חיובי. נקבל:

$$=\int_{\pi}^{0}T_n\left(\cos\theta\right)T_m\left(\cos\theta\right)\left(-d\theta\right)=\int_{0}^{\pi}T_n\left(\cos\theta\right)T_m\left(\cos\theta\right)d\theta=$$

הפכנו את הגבולות ולכן הסימן הפך ממינוס לפלוס. לפי ההגדרה של הפולינום, נקבל:

$$=\int_{0}^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\cos\left(\left(n+m\right)\theta\right)+\cos\left(\left(n-m\right)\theta\right)\right)d\theta=$$

לפי זהות טריגונומטרית. מכיוון ש: $n\neq m$, נקבל:

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\left(n+m\right)\theta\right)}{m+n}+\frac{\sin\left(\left(n-m\right)\theta\right)}{n-m}\right)\Bigg|_0^\pi=0$$

כי סינוס מתאפס בכפולות של π. לכן הפולינומים אכן אורתוגונאליים.

כעת, כדי לחשב את המקדמים בטור פורייה-צ'בישב, אנחנו צריכים מערכת אורתונורמלית (ולא סתם אורתוגונאלית), ולכן נחשב את $\langle T_n\left(x\right),T_n\left(x\right)\rangle$ ונחלק בזה את המקדמים a_n.

אם כן:

$$\langle T_n\left(x\right),T_n\left(x\right)\rangle=\int_{0}^{\pi}\cos n\theta\cos n\theta d\theta=$$

בדיוק כמו במקרה $n\neq m$ אותו חישבנו. במקרה זה, נקבל:

$$=\int_{0}^{\pi}\cos^2 n\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\cos 2n\theta+1\right)d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2n\theta}{2n}+\theta\right)\Bigg|_0^\pi$$

זה אפשרי רק כאשר $n \neq 0$. שוב, סינוס מתאפס בכפולות של π ובסך הכל:

$$= \frac{\pi}{2}$$

כאשר $n = 0$, נקבל:

$$\langle T_0(x), T_0(x) \rangle = \int_0^\pi \cos 0 \cos 0 d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi$$

לכן, עבור $n > 0$, המקדמים יהיו:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \langle f, T_n(x) \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

ועבור $n = 0$, המקדם יהיה:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \langle f, T_0(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_0(x) f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

ספיציפית את T_0 אפשר למצוא: $T_0(\cos\theta) = \cos 0 = 1$, כלומר $T_0 = 1$, ולכן אפשר לומר:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

6. נקרב את הפונקציה $e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[-1, 1]$ בשלוש דרכים - טור טיילור, טור פורייה-לז'נדר וטור פורייה-צ'בישב.

א. פולינום טיילור מסדר 3 סביב $x = 0$.

סביב $x = 0$, טור טיילור של e^x הוא:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ולכן:

$$e^{\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!2^n}$$

ואם נפתח עד סדר 3, נקבל:

$$e^{\frac{x}{2}}\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{x^n}{n!2^n}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}$$

ב. קירוב אופטימלי באמצעות ארבעה פולינומי לז'נדר, P_0,P_1,P_2,P_3.

אנו יודעים שהקירוב האופטימלי הוא ההיטל האורתוגונאלי, שהוא הסכום החלקי של טור פורייה-לז'נדר.

בדומה למה שראינו בשאלה 3, מקדמי פורייה-לז'נדר הם:

$$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}e^{\frac{x}{2}}P_n\left(x\right)dx$$

ואנו צריכים את המקדמים a_0,a_1,a_2,a_3. הקירוב הוא:

$$e^{\frac{x}{2}}\approx a_0P_0+a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3$$

פולינומי לז'נדר הראשונים הם:

$$P_0=1,\ P_1=x,\ P_2=\frac{3x^2-1}{2},\ P_3=\frac{5x^3-3x}{2}$$

עם קצת רצון, קצת יכולת וקצת אינטגרציה בחלקים אפשר לחשב את כל אחד מהמקדמים a_0,a_1,a_2,a_3. אם נדייק ב-3 ספרות אחרי הנקודה, נקבל:

$$a_0\approx 1.042,\ a_1\approx 0.513,\ a_2\approx 0.085,\ a_3\approx 0.008$$

בפתרון של פרופסור שיף הדיוק גבוה יותר. אם אנחנו כבר פה, שימו לב שהמקדמים אכן שואפים ל-0.

אם כן, הקירוב הוא:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx 1.042 \cdot 1 + 0.513 \cdot x + 0.085 \cdot \frac{3x^2-1}{2} + 0.008 \cdot \frac{5x^3-3x}{2}$$

ואם נסדר, נקבל בסך הכל:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + 0.127x^2 + 0.021x^3$$

שוב, בפתרון של פרופסור שיף הדיוק גבוה יותר ($6-5$ ספרות אחרי הנקודה ולא 3).

ג. קירוב אופטימלי באמצעות ארבעה פולינומי צ'בישב, T_0, T_1, T_2, T_3.

גם כאן, הקירוב האופטימלי הוא ההיטל האורתוגונאלי, שהוא הסכום החלקי של טור פורייה-צ'בישב.

המכפלה הפנימית פה היא זו שראינו בשאלה 5, ולא הסטנדרטית. אם כן, מקדמי פורייה-צ'בישב הם:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ \ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\, e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

כפי שראינו בשאלה 5. אנו צריכים את המקדמים a_0, a_1, a_2, a_3 הקירוב הוא:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx a_0T_0 + a_1T_1 + a_2T_2 + a_3T_3$$

פולינומי צ'בישב הראשונים הם:

$$T_0 = 1,\ \ T_1 = x,\ \ T_2 = 2x^2-1,\ \ T_3 = 4x^3-3x$$

ושוב, עם קצת רצון, קצת יכולת וקצת אינטגרציה בחלקים אפשר לחשב את כל אחד מהמקדמים a_0, a_1, a_2, a_3.

אם נדייק ב-3 ספרות אחרי הנקודה, נקבל:

$$a_0 \approx 1.063,\ \ a_1 \approx 0.516,\ \ a_2 \approx 0.064,\ \ a_3 \approx 0.005$$

בפתרון של פרופסור שיף הדיוק גבוה יותר. שוב, שימו לב שהמקדמים שואפים ל-0.

הקירוב הוא:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx 1.063 \cdot 1 + 0.516 \cdot x + 0.064 \cdot \left(2x^2 - 1\right) + 0.005 \cdot \left(4x^3 - 3x\right)$$

ואם נסדר, נקבל:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + 0.128x^2 + 0.021x^3$$

בדיוק הזה, של 3 ספרות אחרי הנקודה, הקירובים מאד דומים. גם אם מדייקים יותר, אין ביניהם הבדל רב.

עם זאת, אנחנו יודעים שהדיוק של טיילור נפגע כאשר מתרחקים מהנקודה $x = 0$, סביבה פתחנו את הטור.

לכן, בהתסכלות "גלובאלית" בכל הקטע, טיילור פחות מדויק משני האחרים.

בפתרון של פרופסור שיף אפשר לראות בגרפים שהיחס בין הפונקציה לקירוב עם צ'בישב קרוב יותר ל-1 מאשר היחס בין הפונקציה לקירוב עם לז'נדר באיזור קצות הקטע, מה שאומר שבסך הכל הקירוב עם צ'בישב טוב יותר (אך לא בהרבה).