דף תרגילים 6

1. נתון טורוס המתקבל כמשטח סיבוב של המעגל $(x-a)^2+z^2=b^2$ במישור xz סביב ציר ה- z $(a>b)$

א. מצאו פרמטרזציה של הטורוס.

$$X(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}(a+b\cos\phi)\cos\theta\\(a+b\cos\phi)\sin\theta\\ \mathrm{b}\sin\phi\end{pmatrix}$$

ב. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של הטורוס.

$$G=\begin{pmatrix}(b\cos\phi+a)^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$$

ג. חשבו את סמלי גאמא של הטורוס.

השתמשו בנוסחאות הבאות:

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}g_1 & 0\\ 0 & g_2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{G}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{g_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{g_2}\end{pmatrix}$$

אז נקבל את הביטויים הפשוטים:

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma^1{}_{11}&=+\frac{g_{1,1}}{2g_1}\\ \Gamma^2{}_{11}&=-\frac{g_{1,2}}{2g_2}\\ \Gamma^1{}_{12}=\Gamma^1{}_{21}&=+\frac{g_{1,2}}{2g_1}\\ \Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}&=+\frac{g_{2,1}}{2g_2}\\ \Gamma^1{}_{22}&=-\frac{g_{2,1}}{2g_1}\\ \Gamma^2{}_{22}&=+\frac{g_{2,2}}{2g_2}\end{aligned}}$$

2. נתונה פונקציה $f:R^2\to R$ ע"י הנוסחא $f(x,y)=e^x+e^y$. נגדיר מטריקה ע"י $G=\begin{pmatrix}f(x,y) & 0\\ 0 & f(x,y)\end{pmatrix}$, חשבו את סמלי גאמא של המטריקה.

כנ"ל, השתמשו בנוסחאות הנ"ל.

3. הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $\langle x_{ij},x_k\rangle=\Gamma^s_{ij}g_{sk}$

ב. $\langle x_{ij},x_m\rangle g^{mk}=\Gamma^k_{ij}$

ג. $g_{ij:k}=\langle x_{ik},x_j\rangle+\langle x_i,x_{jk}\rangle$

ד. $\langle x_{ii},x_i\rangle=\frac{1}{2}g_{ii:i}$

ההוכחות של ביטויים אלו מופיעות בפרק 7 של חוברת הקורס באתר של פרופ' כץ.
http://u.math.biu.ac.il/~katzmik/egreglong.pdf

4. נתון משטח ע"י פרמטרזציה $x\left(u^1,u^2\right)$ ידוע הפיתוח של וקטורי הנגזרות השניות לפי קואורדינטות הבסיס $\left\{x_1,x_2,n\right\}$, $x_{ij}=\Gamma_{ij}^k x_k+L_{ij}n$. הביעו:

א. את המקדמים L_{ij} באמצעות x_{ij} ו- n, הוקטור הנורמל למשטח.

$L_{ij}=\left\langle x_{ij},n\right\rangle$

ב. את $\left\langle x_{ij},x_{kl}\right\rangle$ באמצעות סמלי גאמא Γ_{ij}^k, מקדמי התבנית היסודית הראשונה g_{ij} והמקדמים L_{ij}.

$\left\langle x_{ij},x_{kl}\right\rangle=\Gamma_{ij}^m\Gamma_{kl}^s g_{ms}+L_{ij}L_{kl}$

5. נתון משטח ע"י פרמטריזציה $x\left(u^1,u^2\right)$. עבור העקומה $\beta=x\circ\alpha\left(t\right)$ על המשטח, הביעו את $\left\langle\beta'',n\right\rangle$ באמצעות הנגזרות של $\alpha\left(t\right)$ והמקדמים L_{ij}.

$\left\langle\beta'',n\right\rangle=L_{ij}\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}$

6. נתבונן במשטח M - ספירה ב- R^3 בעלת רדיוס 6 ומרכז בראשית הצירים. יהי $-6<a<6$

א. מצאו פרמטרזצית מהירות יחידה של עקומת החיתוך γ_a של M עם המישור $\{z=a\}$.

ב. עבור איזה ערך של a העקומה הנ"ל היא עקומה גיאודזית של M?

$a=0$, רק במקרה זה מדובר במעגל גדול.

ג. עבור הערך של a מהסעיף הקודם נסמן $b=a+1$ ונסמן את עקומת החיתוך בין M למישור $\{z=b\}$ ב γ_b. קיימת ספירה אחת ויחידה עבורה γ_b היא עקומה גיאודזית. מצאו פרמטרזציה של הספירה הזו.

מהי הספירה ש γ_b הוא מעגל גדול עבורה? ספירה ברדיוס של γ_b וסביב אותו מרכז.

ד. מצאו שתי נקודות $P,Q\in M$ בעלות התכונה הבאה: קיימים אינסוף קווים גיאודזים שונים $\beta:\left[t_1,t_2\right]\to M$ כך ש $\beta\left(t_1\right)=P$, $\beta\left(t_2\right)=Q$.

בין כל שני קטבים של הספירה עוברים אינסוף מעגלים גדולים – אינסוף גיאודזים. למשל $\left(6,0,0\right),\left(-6,0,0\right)$ (הקוטב הצפוני והדרומי).

7. נתון המשטח המוגדר ע"י המשוואה $S=\{\left(x,y,z\right)\in R^3:x^2+y^2=1\}$

א. מצאו את כל העקומות הגיאודזיות על המשטח. הפרידו למקרים ותארו אותם בציור.

ב. נסמן ב- γ_a את עקומת החיתוך של המשטח S עם המישור $\{z=a\}$. הראו שעבור עקומה גיאודזית $\beta\left(t\right)$, הזווית בין $\beta\left(t\right)$ לבין γ_a בנקודת החיתוך ביניהן אינה תלויה ב a.