

בחירת סיום (מועד א') בקורס
מבנים אלגבריים להנדסה (83218)
 מרצה: ד"ר נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 5 נקודות וסעיפים ב' וג' שווים 10 נקודות כל אחד.

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

- א. הגדר: חבורה קומוטטיבית.
 ב. תהי (G, \cdot) חבורה. הוכח כי אם לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים $(g_1 g_2)^2 = g_1^2 g_2^2$ אזי G קומוטטיבית.
 ג. תהי (G, \cdot) חבורה. נתון שלכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים $(g_1 g_2)^7 = g_1^7 g_2^7$. האם G בהכרח קומוטטיבית? הוכח או תן דוגמה נגדית.

שאלה 2

- א. הגדר: תת חבורה.
 ב. תהי G חבורה ויהיו G_1, G_2 תת חבורות של G . הוכח כי $G_1 \cap G_2$ היא תת חבורה של G .
 ג. תהי G חבורה ויהיו G_1, G_2 תת חבורות של G . הוכח כי אם $G_1 \cup G_2$ תת חבורה של G אז בהכרח אחת משתי תת החבורות מכילה את השניה.

שאלה 3

- א. נסח את משפט לגרנו.
 ב. תהי (G, \cdot) חבורה בת p איברים, כאשר p מספר ראשוני. הוכח כי G היא ציקלית.
 ג. הוכח כי המספר $2^{77} - 16$ מתחלק ב-73.

שאלה 4

- א. הגדר: מחלק משותף גדול ביותר (gcd) של זוג פולינומים.
 ב. מצא את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים $f(x) = x^5 - 1$ ו $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ מעל שדה המספרים הממשיים \mathbb{R} , והצג אותו כצירוף שלהם.
 ג. מצא את כל פתרונות המשוואה $22x + 17 = 49 \pmod{120}$.

שאלה 5

- א. הגדר: מחלק אפס בחוג קומוטטיבי.
 ב. האם בחוג $Q/(x^3 - 1)$ יש מחלקי אפס? הוכח את תשובתך. (Q הוא שדה המספרים הרציונליים, והסימון $(x^3 - 1)$ פירושו קבוצת הפולינומים שמתחלקים בפולינום $(x^3 - 1)$.
 ג. האם החוג $Z_2[x]/(x^4 + x + 1)$ הוא שדה? הוכח את תשובתך.