תרגיל 3

1. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול:

(א) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(1-3n^2)=-\infty$

(ב) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n+1}{3+sin(\sqrt{n}+1)}=\infty$

(ג) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+5}}=\infty$

2. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת אריתמטיקה של גבולות:

(א) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{6n^3-5n+7}{3n^3+n^2+1}\right)^4$

(ב) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

(ג) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})$

(ד) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{2^n+3^n}{6\cdot 2^n+2\cdot 3^{n-1}}$ (ניתן להיעזר בכך שעבור $|q|<1$ מתקיים $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}q^n=0$)

3. תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L\in\mathbb{R}$ ו-$1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2+3a_n}{4a_n+1}$. מהו L? נמקו.

4. תזכורת: אם $\{a_n\}$ סדרה חיובית המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.
השתמשו בעובדה זו כדי לחשב את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$

(ב) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{2+\sqrt[3]{n}}$

(ג) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

5. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת כלל הסנדוויץ':

(א) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n+sin(n)}{n+cos(2n)}$

(ב) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$, כאשר $0<a<b<c$ ממשיים

(ג) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{2^n}{n!}$

ד) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2^n\cdot cos(4n)}{(2n)!}$ (רמז: השתמשו בסעיף הקודם)

ה) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$

ו) $\lim_{n\longrightarrow\infty}(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n})$ (הדרכה: $\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}=\sqrt[4]{n}\cdot(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}-1)$ ומתקיים $\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\leq 1+\frac{1}{n}$)