חשבון אינפיניטסמלי לפיסקאים 1

מבחן, מועד א, סמ׳ א, תשס״ד, 3/2/04

פרופ׳ י.אהרונסון

זמן המבחן: שלש שעות.

ענה על שאלה מס׳ 1 ועל עוד ארבע שאלות בלבד ללא כל שימוש בחומר עזר פרט לדף הנוסחאות המצורף. הוכח את תשובותיך.

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א) (5 נק׳) אם $A,\ B \subset (0,1)$ לא ריקות ו- $\inf B = \sup A =: x$, אזי $A \cap B = \{x\}$.

ב) (5 נק׳) אם $a_n,\ b_n \in \mathbb{R}_+$, $a_n b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n > 0$, אזי $b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

ג) (5 נק׳) קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $e^x + x^3 + \sin x = 0$.

ד) (5 נק׳) אם $a_n > 0$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ מתכנס גם.

2. (20 נק׳)

א) מצא $\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$.

ב) הוכח כי $\int_0^\infty e^{-t^2} dt < \infty$.

3. (20 נק׳)

א) הוכח כי אם $x > 1$, אזי $1 < \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) < x$.

עבור $x > 0$, נגדיר את הסידרה $a_1(x), a_2(x), \ldots$ ע״י $a_1(x) = x$ ו- $a_{n+1}(x) := \frac{1}{2}(a_n(x) + \frac{1}{a_n(x)})$.

ב) יהיה $x > 1$. הוכח כי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$ והשב אותו.

ג) האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(\frac{3}{4})$?

4. (20 נק׳)

א) תהיה $a_1, a_2, \ldots$ סידרה חסומה. הוכח כי $x := \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ הינו גבול חלקי של הסידרה.

ב) תהיה $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה על $[0,1]$. הוכח את משפט Weierstrass: קיים $M > 0$ כך ש- $f(x) \le M$ לכל $x \in [0,1]$.

5. (20 נק׳)

א) מצא את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} x^n$.

ב) בדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2}$.

6. (20 נק׳)

נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ המוגדר ע״י

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0, \\ 3 - 2\cos x & x < 0. \end{cases}$$

מצא את $f(0)$ כך ש-f תהיה רציפה ב-0 והוכח כי הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המתקבלת הינה C^2 על $\mathbb{R}$.

בהצלחה!!!

מחברת מס' ____
מתוך ____ מחברות

50

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

20

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לדבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים. 20
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה. 20
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו. 20
6. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון (טופס הבחינה) לידו ייחשב כמי שנבחן במועד זה. היה והחליט לא לכתוב את הבחינה, לא יהא רשאי לעזוב את חדר הבחינה, אלא כעבור חצי שעה ממועד תחילתה ולאחר שהחזיר את המחברת והשאלון. ציונו בבחינה יהיה "0". 20
7. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח.
8. יש לכתוב את התשובות בעט, בכתב יד ברור ונקי. נבחן הבוחר לכתוב טיוטה יעשה זאת בעמודו הימני של דפי מחברת הבחינה ויציין בראש העמוד "טיוטה". אין לתלוש דפים מהמחברת.
9. מחברות הבחינה שקיבל הנבחן תהיינה בפיקוחו ובאחריותו במשך כל הבחינה. בעת יציאה מן החדר יופקדו המחברות והשאלון בידי המשגיח.
10. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברות והשאלון ויקבל מידי המשגיח את כרטיס הנבחן.
11. הנוהג בניגוד להוראות ול"נוהל סדרי בחינות ודיווח ציונים" צפוי להפסקת בחינתו ואף להעמדה לדין משמעתי.
12. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

100

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון ____
המחברת נבדקה ביום ____
חתימת המורה ____

תאריך הבחינה 9/02/04
שם הקורס אינפי לכלכלנים
שם המורה פרופ' ליברזון
החוג/המגמה כלכלה

43948

1,2,3,5,6 6 ענינו

038070306 50
03211833011

2) א. נמצא את הגבול בעזרת אריתמטיקת גבולות:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}^{\frac1n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n!}{n!\cdot n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\cdot\frac{n!\cdot n!}{2n!}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=4$$

10

ב. נשתמש במבחן ההשוואה כפי שלמדנו ש $\int_0^\infty e^{-t^2}dt<\infty$ לא מדויק

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt \le \lim_{a\to\infty}\int_0^a te^{-t^2}dt=\lim_{a\to\infty}\frac{e^{-t^2}}{-2}\Big|_0^a=\lim_{a\to\infty}\frac{e^{-a^2}}{-2}+\frac12=\frac12<\infty$$

10

הסבר: השוואתי את האינטגרל $\int e^{-t^2}dt$ עם te^{-t^2} (עבור $t>1$) מכיוון שלכל $t>1 \Rightarrow e^{-t^2}<te^{-t^2}$ (שפונקציות הן מעל ציר ה-x חיוביות)

3) א. נוכיח תחילה כי $\frac12(x+\frac1x)<x$:

$\frac12(x+\frac1x)<x$

$\frac12(\frac1x+x)-x<0$

$\frac12(\frac1x+x-2x)=\frac12(\frac1x-x)\underset{x>1}{<}\frac12(1-1)=0$

$\Downarrow$

$\frac12(x+\frac1x)<x$ מ.ש.ל

כעת הצד השני של האי-שוויון:

$\frac12(x+\frac1x)>1$

$\frac12(x+\frac1x)-1>0$

$\frac12(x+\frac1x-2)>0$

$\frac12(\frac{x^2-2x+1}{x})=\frac12\frac{(x-1)^2}{x}\underset{x>1>0}{>}0$ חיובי

מ.ש.ל

ב. נוכיח כי הסדרה מונוטונית וחסומה ונסיק כי קיים גבול:

לכן האי-שוויון שהוכחנו $a_{n+1}=\frac12(a_n(x)-\frac{1}{a_n(x)})<a_n$ א

$a_n>1$. לכן ~~[illegible]~~

שאלה 3 - המשך

נוכיח באינדוקציה ש $a_n > 1$.

עבור a_1:

$$a_1 = x > 1$$
נתון

נניח ש $a_n > 1$ ונוכיח כי $a_{n+1} > 1$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) > 1$$

בסעיף א' הוכחנו ש $a_n > 1$ (הנחת האינדוקציה) אז $a_{n+1} > 1$

לסיכום הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה ע"י 1 ולכן יש לה גבול

הגבול לפי הסדרה אריתמטית שבאה:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n} - 2a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1-a_n^2}{a_n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm 1$$

הגבול יכול להיות ± 1.

מכיוון שהסדרה חסומה מלמטה ע"י 1, הגבול לא יכול

להיות -1, ולכן $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$ ✓

ג. עבור $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{12}\right) > 1$

החל מהאיבר השני הסדרה מתנהגת כמו הסדרה $a_n(x)$

ש $x = \frac{25}{24} > 1$, ולכן הגבול שלה הוא גם 1 ✓

$$\lim_{n\to\infty} a_n\left(\frac{3}{4}\right) = 1$$

20/20

5. נמצא את רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} x^n$ כי $a_n = \binom{3n}{n}$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \cancel{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)}{n+1}\right)} \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{\binom{3(n+1)}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{2n!\,n!} \cdot \frac{(n+1)!\,(2n+2)!}{(3n+3)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3} = \frac{4}{27}$$

טור עבור x מתכנס כאשר $|x| < \frac{4}{27}$ ✓

10/10

שאלה 5 - המשך

ג. נשווה את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+n}{n^2}$ עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

לפי מבחן ההשוואה הגבולי נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^n+n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n+n}{n^{\cancel{2}}}\right)\cdot\cancel{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(-1)^n}{n}+1}{1}\right) = 1$$

מכיוון שהגבול קיים וסופי (ושונה מ-0) הטורים מתכנסים (או מתבדרים) ביחד.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+n}{n^2}$ <u>מתבדר</u>

~~הערה~~ (צריך שהטורים יהיו <u>חיוביים</u> ולכן הם לא מבחן השוואה) 10/10

(6)

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ 3-2\cos x & x<0\end{cases}$$

על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב-0 הגבולות החד-צדדיים צריכים להיות קיימים ושווים ל-$f(0)$:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2+1)=1$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(3-2\cos x)=3-2=1$$

לכן יש מסקנה: $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\underline{f(0)=1}$

בתחום $x>0$ ו-$x<0$ היא סכום של פונ' אלמנטריות

ולכן היא גזירה ורציפה. נבדוק ~~שהפונקציה~~ אם $f(x)$ גזירה

ב-0, כך נראה שהנגזרות החד-צדדיות <u>קיימות</u>

<u>ושוות</u>

$$f_+'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to0^+}x=0$$

$$f_-'(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{3-2\cos x-1}{x-0}=\lim_{x\to0^-}2\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0^-}2\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}2\left(\frac{x}{4}\right)\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{2}=0$$

תשובה: הנגזרות שוות וקיימות ולכן f גזירה ב-0 מכיוון

ש-f גזירה גם ב-0 ~~...~~ גזירה בכל $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>0 & \to (x^2+1)'=2x\\ 0 & x=0\\ 2\sin x & x<0 & \to (3-2\cos x)'=2\sin x\end{cases}$$

שאלה 6 - המשך

נראה כי גם הנגזרת שנייה באותה דרך:

f

~~[illegible]~~

בתחום $x>0$ הנגזרת היא פונקציה אלמנטרית ולכן היא גזירה ורציפה

בתחום $x<0$ הנגזרת היא פונקציה אלמנטרית ולכן היא גזירה ורציפה

נבדוק שהנגזרות החד צדדיות קיימות ושוות ב $x=0$:

$$f''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x-0}{x}=2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin x-0}{x}=2$$

אם כן, הנגזרות החד צדדיות קיימות ושוות ולכן הפונק' גזירה ב $x=0$ פעמיים.

מכיון שהנגזרת השנייה קיימת $f'(x)$ רציפה. ולכן f היא C^1 אז. נבדוק שגם הנגזרת השנייה רציפה:

$$f''(x)=\begin{cases}2 & x\geq0\\ 2\cos x & x<0\end{cases}$$

בתחום $x>0$ ו $x<0$ הנגזרת השנייה מורכבת מ פונ' אלמנטריות, ולכן היא רציפה. נבדוק רציפות ב $x=0$

$$\lim_{x\to0^+}f''(x)=2$$

$$\lim_{x\to0^-}f''(x)=\lim_{x\to0^-}2\cos x=2 \quad \checkmark$$

$$\lim f''(0)=2$$

~~[illegible]~~

הנגזרת השנייה רציפה ב 0 ולכן $f(x)$ היא C^2 אז.

$\checkmark$

20

אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב

שאלה 1

סיון!

1.א. לא נכון

נגדיר: $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B=\{0.1\}$

$a_n = 0.1 - \frac{1}{n+10}$ $(n\in N)$

a_n היא סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ע"י 0.1:

$\sup A = \underset{\text{כי מונוטונית}}{\sup a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0.1 - \frac{1}{n+10} = 0.1$

אולם $0.1 \notin A$

בקבוצה B יש איבר אחד בלבד: $\inf B = \sup B = 0.1$

קיבלנו ש- $\inf B = \sup A$, אבל $A\cap B = \{0\}$

ב. הטענה אינה נכונה:

נגדיר $a_n = \begin{cases}1 & n \text{ זוגי}\\ \frac{1}{n} & n \text{ אי-זוגי}\end{cases}$ $b_n = \begin{cases}\frac{1}{n} & n \text{ זוגי}\\ 1 & n \text{ אי-זוגי}\end{cases}$

$a_n \cdot b_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

לסדרה a_n יש שני גבולות חלקיים:

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

לכן $\overline{\lim}\, a_n = 1 \neq 0$

אם כן a_n ו- b_n מקיימות את כל הדרישות, אבל ל- b_n ול- a_n אין גבול (בגלל של- a_n יש לו שני גבולות חלקיים 0 ו-1 שלא אינם שווים)

ג. נגדיר $f(x) = e^x + x^3 + \ln x$ ונוכיח כי יש לפונקציה שורש אחד לפחות.

מכיוון שהפונקציה מורכבת מפונקציות אלמנטריות היא רציפה לכל x

ויהי a מספיק שלילי ש [illegible]

$f(a)$ ולפי משפט ערך הביניים תהיה [illegible] כי קיים $f(x_0)=0$

(ההמשך בדף הבא)

ענה כן:

$f(0) = e^0 + 0 - \cancel{0} = 1 > 0$

$f(-10) = e^{-10} - 10^3 + \ln(-10) < 1 - 10^3 + 1 = 2 - 1000 = -1998 < 0$

לכן מרציפות יש פתרון לפחות אחד בין $-10 < x < 0$

ב. לא נכון:

דוגמא נגדית: ניקח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כש $a_n = \frac{1}{n^2}$ מתכנס

אבל $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר