18.03.14 (1)

שיטות נומריות ותכנות מדעי - הרצאה 4

המשך מפ"ר: (עד זמן T קבוע) →
$$\begin{cases} \dot{y} = f(x,t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

הראינו אם $f \in C^2$ אז שיטת אוילר לפי קרב בצמנים $t_k = hk$:

$$y_{k+1} = y_k + h f(y_k, t_k)$$

y_k הוא הקרוב עבור $y(t_k)$.

- שני מקורות לשגיאה:

(1) round-off error, שגיאות מה"צוג הנומרי בתוכנה, ההעגלה יוצרת שגיאה בכל שלב.

17 ספרות אחרי הנקודה ~ double

(2) truncation error $o(h^2)$ בכל צעד

- שגיאה לוקלית $o(h^2)$
- שגיאה גלובלית $o(h^2) \cdot o(\frac{1}{h}) = o(h^1)$

וה"ג שגיאה מספר 1.

<u>התכנסות:</u>

$$\lim_{h \to 0^+} \sup_{k=0,\dots,\frac{T}{h}} |y(hk) - y_k| = 0$$

<u>הגדרה:</u> נתונה שיטה נומרית $y_{n+1} = Y(t, h, y_0, \dots, y_n)$

השיטה נקראת מספר p אם:

$$|y(t_{n+1}) - Y(t, h, y(t_0), \dots, y(t_n))| = O(h^{p+1})$$

למשל; באוילר ראינו

$$|y(t_{k+1}) - [y(t_k) + h f(y(t_k), t_k)]| = O(h^2)$$

ולכן היתה שיטה מספר 1.

ואז, אם הסכימה מתכנסת, כלומר אם

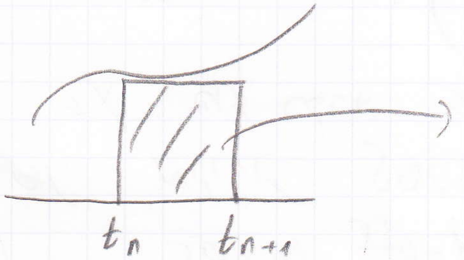
$$\lim \sup_{k=0,\dots,\frac{T}{h}} |y(t_k) - Y(\dots)| = 0$$

אז השגיאה הגלובלית ה"א $O(h^{p+1}) O(\frac{1}{h}) = O(h^p)$

שיטת הטרפז (שיפור לשיטת אוילר)

$$y(t) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t} f(y(s), s)\,ds \qquad , \dot{y} = f(y,t)$$

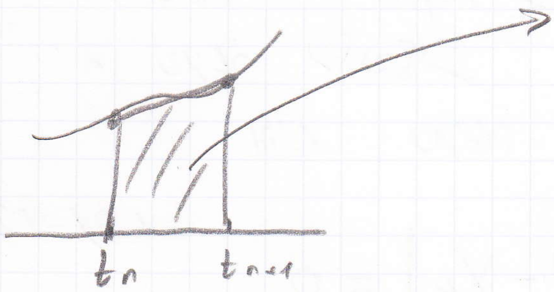
לפי אוילר



לקחת את המלבן

$$\int_{t_n}^{t} f(y(s), s)\,ds \simeq h \cdot f(y(t_n), h)$$

לפי שיטת הטרפז



$$\int_{t_n}^{t} f(y(s))\,ds \simeq \frac{h}{2}\left[f(y(t_n)) + f(y(t_{n+1})) \right]$$

ונקבל:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(y_n) + f(y_{n+1}) \right]$$

שגיאה: אם $f \in C^3$ והשגיאה $O(h^3)$ לוקאלית

והגלובלית $O(h^2)$

זו נקראת שיטה סתומה implicit method

אנחנו מקבלים משוואה סתומה עבור y_{n+1}

לעומתה אוילר explicit method (אין תלות ב y_{n+1} בשאלה)

18.3.14 (2)

לפתרון המשוואה הסתומה:

אם f לינארית "אין בעיה" $f=A+Bx$

מעבירים אגפים, ואז is explicit.

אחרת, near identity מערכת לא לינארית מהצורה:

$$y = x + \varepsilon g(x)$$

כאשר $\varepsilon = h$

$$y_{n+1} = x \quad , \quad g = -\frac{1}{2} f(y_n) - \frac{1}{2} f(x)$$

$$y = y_n$$

<u>משפט:</u> שיטת הטרפז מתכנסת.

<u>הוכחה:</u> כמו בהוכחה עבור שיטת אוילר.

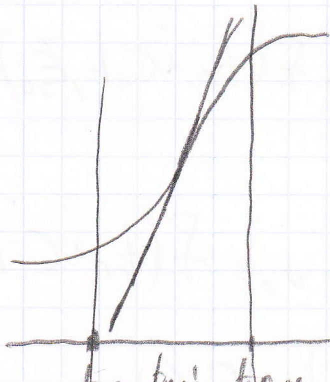
<u>שיטות θ</u>: (הכללה שיטת אוילר והטרפז.)

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\theta f(y_n) + (1-\theta) f(y_{n+1})\right]$$

			סדר
מפורש ← forward Euler	אוילר	$\theta = 1$:	1
סתומי	טרפז	$\theta = \frac{1}{2}$:	2
סתומי: Backward Euler		$\theta = 0$:	1

הסדר הוא אחד כל $\theta \neq \frac{1}{2}$.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s))\,ds}$$



$$\longrightarrow \; +h f\left(y\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right)\right)$$

תרגיל:

הוכחה:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s))\,ds = h f(y(t_{n+\frac{1}{2}})) + O(h^3)$$

$$t_{n+\frac{1}{2}} = (n+\tfrac{1}{2})h$$

הבעיה היא שלא יודעים את $y(t_{n+\frac{1}{2}})$

נקרב את $y(t_{n+\frac{1}{2}})$ בעזרת אוילר (כדי לשמור על שגיאה $O(h^3)$)

$$\text{סימון} \rightarrow \begin{cases} \xi_1 = y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h f(\xi_1) \end{cases}$$

שיטה זו נקראת midpoint rule

או Runge-kutta מסדר 2

או Explicit Rk 2 (ERk 2)

- השגיאה הלוקאלית בה היא $O(h^3)$ ולכן הגלובלית $O(h^2)$ והשיטה היא מסדר 2.

שיטות Runge-kutta (Rk):

(1) שיטות ERk עם דרגה ν:

נתונים $0 = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_\nu \leq 1$ קבועים. קבועים a_{ij}

קבועים b_j

$$\begin{cases} \xi_0 = y_n \\ \xi_1 = y_n + h a_{1,0} f(t_n + c_0 h, \xi_0) \\ \xi_2 = y_n + h\left[a_{2,0} f(t_n + c_0 h, \xi_0) + a_{2,1} f(t_n + c_1 h, \xi_1)\right] \\ \vdots \\ \xi_\nu = y_n + h \sum_{i=0}^{\nu-1} a_{\nu,i} f(t_n + c_i h, \xi_i) \\ y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{\nu} b_j f(t_n + c_j h, \xi_j) \end{cases}$$

18.03.14 (3)

עבור midpoint נראה שהוא ERK :

$$\begin{cases} \xi_1 = y_n + \frac{h}{2} f(y_n, t_n) \\ y_{n+1} = y_n + h f(\xi_1, t_n + \frac{h}{2}) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{matrix} c_0 = 0 & c_1 = \frac{1}{2} & \nu = 1 \\ a_{0,1} = \frac{1}{2} & b_0 = 0 & b_1 = 1 \end{matrix} \right\}$$

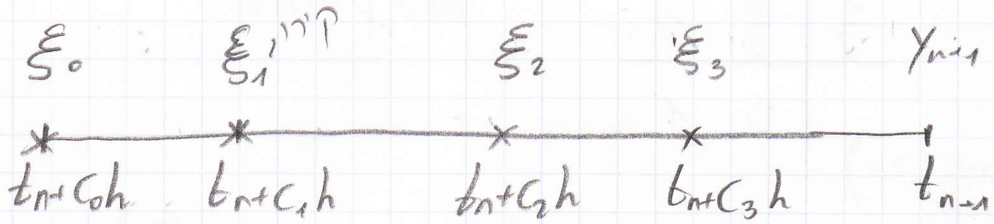
נציב במערכת הקודמת לקבל את midpoint

$$\begin{cases} \xi_0 = y_n \\ \xi_1 = y_n + h \frac{1}{2} f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_n + \frac{h}{2}, \xi_1) \end{cases}$$

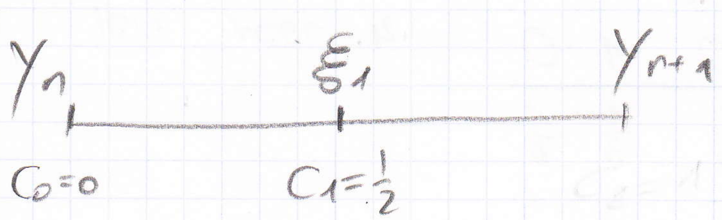
לכן midpoint היא שיטת RK

מפורש בשום מקום אין משוואה סתומה ולכן זו Explicit

לדוגמא אם $\nu = 3$



ב mid point



עבור השיטה, צורת רישום המקדמים:

$$C=\begin{pmatrix}c_0\\ \vdots \\ c_\nu\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{\nu+1}\quad,\quad b=\begin{pmatrix}b_0\\ \vdots \\ b_\nu\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{\nu+1}$$

$$A\in M_{\nu+1,\nu+1}$$ משולשית תחתונה + אפס באלכסון

והייצוג לסכימה:

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

<u>דוגמאות</u> (1)

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$ היא סכימת אוילר

$$y_{n+1}=y_n+h\,f(y_n)$$

(2)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$ midpoint

(3)

(יש להוסיף זמנים כמו ב-y_{n+1})

$$\xi_1=y_n+\frac{h}{2}f(y_n)$$

$$\xi_2=y_n+\frac{h}{2}f(\xi_1)$$

$$\xi_3=y_n+h\,f(\xi_2)$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$\nu=3$

סכימה שנקראת RK4 והיא מסדר 4

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}f(y_n,t_n)+\frac{h}{3}f\left(\xi_1,t_n+\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{3}f\left(\xi_2,t_n+\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{6}f\left(\xi_3,t_n+h\right)$$

ניתן להוכיח כי לכל $\nu \geq 4$ סדר הסכימה $< \nu+1$

ישנה הקלה ל IRK (implicit) צורה סתומה

כאשר

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline 0 & b^T \end{array}$$

A מטריצה מלאה.

$$\begin{cases} \xi_k = y_n + h\sum_{i=0}^{\nu} a_{\nu,i}\, f(t_n + c_i h, \xi_i) \\ y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=0}^{\nu} b_j\, f(t_n + c_j h, \xi_j) \end{cases}$$

<u>דוגמא:</u> Backward-E
שיטה סתומה

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Collocation methods

תת מחלקה של IRK.

יהיו $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_\nu = 1$. נחפש פולינום p מדרגה ν המקיים:

$$\begin{cases} p(t_n) = y_n \\ p'(t_n + c_j h) = f(t_n + c_j h, p(t_n + c_j h)) \end{cases}$$

ואז נקבע

$$y_n = P(t_{n+1})$$

המטרה לקרב

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s))ds$$

יש לנו ν+1 משוואות עם ν+1 נעלמים (על מקדמי הפולינום)
וזו מערכת סתומה.

מדוע זוהי שיטת IRK:

נסמן ב - $p_j(t)$ את פולינום לגרנז' $p_j(t)$ המקיים:

$$p_j(c_j)=1 \quad , \quad \forall i\neq j \quad p_j(c_i)=0 \; .$$

נסמן

✡
$$\begin{cases} a_{ji}=\int_0^{c_j} p_i(s)\,ds & i,j=0,\dots,\nu \\ b_j=\int_0^{1} p_j(s)\,ds & j=0,\dots,\nu \end{cases}$$

<u>תרגיל</u>: הראו ששיטת הקולוקציה היא שיטת IRK עם סכימה

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

<u>משפט</u>: לכל $1\leq\nu$ יש סכימת קולוקציה מסדר 2ν השיטה נקראת גאוס-לגרנז'.

<u>"הוכחה"</u>:

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+\underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,y(s))\,ds}_{O(h^{2\nu+1})}$$

חייבים להשתמש בכלל גאוס. לכן:

האפסים של הפולינום: $c_1,\dots,c_\nu$, $c_0=0$

האורתוגונליים בקטע $[0,1]$, עם פונ' משקל $w=1$.

והמקדמים מ ✡ לעיל. השגיאה הלוקלית תהיה $2\nu+1$ והגלובלית 2ν

<u>תרגיל</u>: מצאו סכימת גאוס-לגרנז' מדרגה 1 ו 2.

18.03.14 (5)

multi step   שיעור

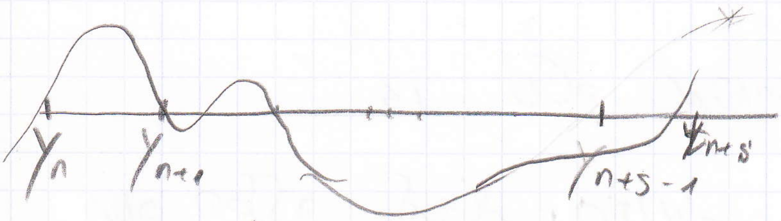
נתון $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+s-1}$

ורוצים למצוא y_{n+s}

נתאים ל $y'=f$

פולינום מדרגה $s-1$

ונשתמש בו במקום ב-f.



Adams / שיטת אדמס $\quad y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s), s)\,ds$

$$p(t) = \sum_{m=0}^{s-1} p_m(t) f(t_{n-m}, y_{n-m})$$

כאשר
$$\begin{cases} p_m(t_{n-m}) = 1 \\ \forall k \neq m \quad p_m(t_{n-k}) = 0 \end{cases}$$

הדיוק:
$$p(t) = y'(t) + O(h^s)$$

נעביר:
$$y_{n+s} = y_{n+s-1} + \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} p(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad y_{n+s} = y_{n+s-1} + h \sum_{m=0}^{s-1} \boxed{h^{-1} \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} p_m(s)\,ds} \cdot f(t_{n-m}, y_{n-m})$$

b_m נתון

דוגמאות $s=1$;

מקרה פרטי אוילר
$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n)$$

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left[\frac{3}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2} f(t_n, y_n)\right] \quad s=2$$

$s=3$:

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h\left[\frac{23}{12} f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{4}{3} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{5}{12} f(t_n, y_n)\right]$$

זו שיטה מפורשת Explicit

ישנה הכללה לשיטת סתומה הנקראת Adams-Moulton