

תרגול מס' 11
טורי חזקות, פיתוח טיילור ומשפט היחידות
טור חזקות:

טור מהצורה - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n = a_0 + a_1 (z - \alpha) + a_2 (z - \alpha)^2 + \dots$ נקרא -
 טור חזקות סביב הנק' $z = \alpha$.

תחום ההתכנסות של טור חזקות:

עבור טור חזקות - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ תחום ההתכנסות D הוא אחד מ-3:

1. $D = \emptyset$ (כל המישור המרוכב).
2. $D = \{\alpha\}$ - הנק' $z = \alpha$ בלבד.

3. קיים $R > 0$ כך ש- $\{z \mid |z - \alpha| < R\} \subseteq D \subseteq \{z \mid |z - \alpha| \leq R\}$ - כלומר תחום ההתכנסות מוכל בעיגול הסגור ברדיוס R סביב α ומכיל את העיגול הפתוח. בעיגול הפתוח, הטור מתכנס בהחלט, ועל שפת העיגול יכול להיות שהטור יתכנס ויכול להיות שלא.

רדיוס ההתכנסות:

ניתן לחשב את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות ע"י הנוסחה: $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$

כאשר R יכול להיות גם אפס וגם אינסוף.

כמו כן, אם קיים הגבול: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ אז: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

טור טיילור:

הטור: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n$ נקרא - טור טיילור של הפונקציה f סביב הנקודה $z = \alpha$.

רדיוס ההתכנסות של טור טיילור:

רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של הפונקציה f סביב הנקודה $z = \alpha$ הוא המרחק של α מנקודת הסינגולריות (הלא-סליקה) של f הקרובה אליה ביותר (אם f שלמה, אז רדיוס ההתכנסות הוא אינסוף...)

משפט:

תהי f אנליטית בעיגול פתוח D סביב הנקודה $z = \alpha$, אז:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \quad \text{לכל } z \in D$$

(כלומר טור טיילור של פונקציה אנליטית מתכנס לפונקציה בעיגול D).

משפט נוסף:

אם הטור $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ מתכנס בתוך עיגול פתוח כלשהו סביב α , אז הוא

מתכנס לפונקציה אנליטית f , כך ש- $S = f$ הוא למעשה טור טיילור של f סביב α .

פיתוחי טיילור לפונקציות האלמנטריות:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

אפסים של פונקציה אנליטית:

תהי f פונקציה אנליטית בתחום D . אם בנק' $\alpha \in D$ מתקיים: $f(\alpha) = 0$ אז נקרא לנק' $z = \alpha$ בשם: אפס של f .

סדר של אפס:

אם $f^{(k)}(\alpha) = 0$ לכל $0 \leq k < n$, וכן: $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$, נאמר כי הנק' $z = \alpha$ היא אפס מסדר n של f .
אפס מסדר 1 יקרא אפס פשוט. יכול להיות גם אפס מסדר אינסופי.

משפט:

אם f אנליטית בתחום D , וקיימת נקודה $\alpha \in D$ שהיא אפס אינסופי של f , אז $f \equiv 0$ ב- D .

משפט היחידות:

- אם f אנליטית בתחום D , וקיימת סדרה מתכנסת של נקודות (לא מנוונת) $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D$, שהגבול שלה ב- D , כך שלכל n מתקיים: $f(z_n) = 0$, אז $f \equiv 0$ ב- D .
- אם f, g אנליטיות בתחום D , וקיימת סדרה מתכנסת של נקודות (לא מנוונת) $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D$, שהגבול שלה ב- D , כך שלכל n מתקיים: $f(z_n) = g(z_n)$, אז $f \equiv g$ ב- D .

(שני הניסוחים שקולים זה לזה)

Brook Taylor (1685 – 1731)

תרגיל מס' 1

פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור ומצאו את רדיוס ההתכנסות:

א. $\alpha = 0$ סביב $f(z) = e^z$.

ב. $\alpha = 1$ סביב $f(z) = \frac{1}{z-i}$.

ג. $\alpha = 0$ סביב $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$.

פתרון

א. לכל n מתקיים: $f^{(n)}(z) = e^z$, ולכן: $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, נציב בנוסחא של טור טיילור ונקבל:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

הפונקציה היא שלמה ולכן רדיוס ההתכנסות הוא אינסופי.

ב. נשים לב כי:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)+(1-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{1-i}}$$

אבל:

$$\frac{1}{1 + \frac{z-1}{1-i}} = \frac{1}{1 - \frac{z-1}{i-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{i-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i-1}\right)^n \cdot (z-1)^n$$

אם נקח מעגל ברדיוס קטן מספיק, כך ש- $\left|\frac{z-1}{i-1}\right| < 1$, נקבל סכום של טור הנדסי

ולכן נקבל:

$$f(z) = \frac{1}{1-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i-1}\right)^n (z-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i-1}\right)^{n+1} (z-1)^n$$

נמצא את רדיוס ההתכנסות:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-\left(\frac{1}{i-1}\right)^n}{-\left(\frac{1}{i-1}\right)^{n+1}} \right| = |i-1| = \sqrt{2}$$

נשים לב, כי נקודת הסינגולריות של f הקרובה לנק' $z=1$ היא $z=i$ שמרחקה ממנה הוא בדיוק $\sqrt{2}$.

ג. נשים לב כי: $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)'$

כמו כן: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (בעיגול היחידה, זהו טור הנדסי), נבצע גזירה אבר-אבר על הטור ונקבל:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' = (z^0)' + \sum_{n=1}^{\infty} (z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

תרגיל מס' 2

תהי: $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sin z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$. הוכיחו כי ניתן לפתח את f לטור חזקות סביב הנק' $z = 0$, ומצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור.

פתרון

נשים לב כי מתקיים:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(0+z) - f(0)}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{z}{\sin z} - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z + z \cos z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\cos z + \cos z - z \sin z} = 0 \end{aligned}$$

לופיטל

כלומר, קבלנו כי f גזירה בנק' $z = 0$ וכן ברור כי f גזירה בסביבה כלשהי של 0 (כי קיימת סביבה של 0 שבה $\frac{z}{\sin z}$ גזירה).

כלומר קיבלנו f אנליטית ב- $z = 0$, ולכן ניתן לרשום אותה כטור טיילור סביב 0 . כמו כן, נקודות הסינגולריות של f הן: $z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ (מתי ש- \sin מתאפס), ואם כן נקודת הסינגולריות הקרובה ביותר ל- 0 היא $z = \pi$, ונסיק כי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא π .

תרגיל מס' 3

א. מצאו את פיתוח טיילור של הפונקציה: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ סביב הראשית.

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל: $I_k = \int_C \frac{dz}{z^k (1+z^2)}$, כאשר: $C = \left\{ z \mid |z| = \frac{1}{2} \right\}$.

פתרון

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

סכום של טור הנדסי, עבור $|z| < 1$

רדיוס התכנסות הטור – המרחק לנקודת הסינגולריות הראשונה שהיא $z = \pm i$, כלומר 1 .

ב. לפי נוסחת קושי לנגזרות מתקיים:

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z^{k+1}(1+z^2)} = \frac{k!}{2\pi i} I_{k+1}$$

$$. I_k = \frac{2\pi i}{(k-1)!} f^{(k-1)}(0) \text{ ולכן נקבל:}$$

כעת מהפיתוח שמצאנו בסעיף א' נקבל כי:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} & k \text{ is even} \\ 0 & k \text{ is odd} \end{cases}$$

ולסיכום נקבל:

$$I_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot 2\pi i & k \text{ is odd} \\ 0 & k \text{ is even} \end{cases}$$

תרגיל מס' 4

תהי f פונקציה אנליטית בעיגול היחידה, המקיימת: $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq e^{-n}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $f \equiv 0$.

פתרון

נניח בשלילה f אינה זהותית אפס, לכן הנק' $z = 0$ היא אפס מסדר סופי של f , כלומר - קיים k טבעי כלשהו כך שלכל $m < k$ מתקיים $f^{(m)}(0) = 0$, אבל $f^{(k)}(0) \neq 0$.

כמו כן f אנליטית בעיגול היחידה, לכן אפשר לפתח אותה לטור טיילור סביב הראשית ולקבל:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} z^n$$

כלומר, ניתן לרשום את f בצורה: $f(z) = z^k g(z)$ כאשר g אנליטית בעיגול היחידה (כיוון

$$. g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} 0^k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \neq 0 \text{ וכן:}$$

כעת נתבונן בסדרת הנקודות $\{z_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$. אז לכל n טבעי מתקיים: $f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^k g\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$. g\left(\frac{1}{n}\right) = n^k f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ולכן נסיק כי:}$$

$$. \left| g\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| n^k f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq n^k e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ מכאן ש-}$$

אבל הראנו כי $g(0) \neq 0$, ואם כן קיבלנו סתירה לאנליטיות (לרציפות) של g .

לכן נסיק כי $f \equiv 0$ בתחום - **מש"ל**.

תרגיל מס' 5

האם קיימת פונק' אנליטית בנק' $z = 0$ כך שעבור סדרת הנקודות $\left\{z_n = \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מקבלת את

סדרת הערכים: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

במלים אחרות – האם קיימת f אנליטית ב-0, כך שלכל n מתקיים: $f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$?

א. כאשר $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots\right\}$?

ב. כאשר $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$?

ג. כאשר $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\}$?

פתרון

סדרת הנק' $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא מתכנסת ל-0, וכן עפ"י הנתון: $f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0$ לכל n . לכן עפ"י משפט

היחידות נסיק כי $f \equiv 0$ בתחום האנליטיות שלה, וזה בסתירה לכך ש- $f(1) = \frac{1}{2}$, למשל. כלומר, לא קיימת f כזו.

ב. לכל n טבעי מתקיים: $f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$, כמו כן $\frac{1}{2n} \rightarrow 0$ ולכן נסיק עפ"י משפט היחידות כי

$f(z) = z$ לכל z בתחום האנליטיות של f . אבל $f(1) = \frac{1}{2} \neq 1$, למשל. כלומר קיבלנו סתירה ולכן נסיק כי לא קיימת f כזו.

ג. לכל n טבעי מתקיים: $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$. כלומר, f מתלכדת עם הפונקציה $\frac{z}{2+z}$

על סדרת הנקודות $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. לכן עפ"י משפט היחידות נסיק כי $f(z) = \frac{z}{2+z}$ לכל z בתחום ההתכנסות.

תרגיל מס' 6

תהי f פונקציה אנליטית בתחום D . $\{z_n\} \subseteq D$ סדרת נקודות מתכנסת - $z_n \rightarrow z_0 \in D$.

כמו כן ידוע כי $f'(z_n) = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

מהי הפונקציה f ?

פתרון

ראינו כבר, כי מכך ש- f אנליטית ניתן להסיק כי גם f' אנליטית ב- D . לכן עפ"י משפט היחידות נסיק כי $f' \equiv 1$ בתחום D ($f'(z_n) = 1$ לכל n טבעי).

ולכן $f(z) = z + c$ (c קבוע כלשהו).

תרגיל מס' 7

תהי $f(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$.

אנחנו יודעים כי $f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-z} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$,

כלומר - $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = z_k = \frac{\pi k - 1}{\pi k} = 1 - \frac{1}{\pi k}, k \in \mathbb{Z}$.

לסדרת הנקודות $\{z_k\}$ יש נקודת הצטברות, אבל למרות זאת f אינה הפונקציה הקבועה אפס. מדוע זה לא סותר את משפט היחידות?

פתרון

לסדרת הנקודות: $\{z_k\} = \left\{1 - \frac{1}{\pi k}\right\}$ יש אמנם גבול, אבל גבול זה הוא הנקודה $z = 1$. נקודה זו אינה שייכת לתחום האנליטיות של f , ולכן משפט היחידות אינו תקף במקרה זה.

תרגיל מס' 8

נכון לא נכון?

א. קיימת פונקציה אנליטית f בעיגול היחידה, כך שמתקיים: $f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$.

ב. קיימת פונקציה אנליטית f בעיגול היחידה, כך שמתקיים: $f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$.

פתרון

א. נסמן: $g(z) = f(z) \cdot f(-z) - z$.

אז g מתאפסת על סדרת הנקודות $\left\{z_n = \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ולכן עפ"י משפט היחידות $g(z) = 0$ לכל z .

בעיגול היחידה. כלומר, נקבל כי $f(z) \cdot f(-z) = z$ לכל z בעיגול היחידה.

אבל זה לא ייתכן, כיוון שהפונק' באגף שמאל היא זוגית בעוד שהפונקציה באגף ימין היא אי-זוגית!

לכן נסיק כי הטענה אינה נכונה.

ב. נסמן כמו קודם: $g(z) = f(z) \cdot f(-z) - z^2$, ונקבל כי $g \equiv 0$ בעיגול היחידה, ולכן לכל z .

בעיגול היחידה מתקיים: $f(z) \cdot f(-z) = z^2$. קל לראות כי הפונקציה: $f(z) = iz$ מקיימת את התנאי הזה.

הערה: אם ממש רוצים, אז אפשר למצוא את f ע"י שימוש בטור טיילור שלה.

$$\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ - בעיגול היחידה}$$

$$f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n$$

$$\text{כמו כן ידוע כי: } f(z) \cdot f(-z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n\right) = z^2$$

השוואת מקדמים עבור z^0 $\leftarrow a_0^2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

השוואת מקדמים עבור z^1 $\leftarrow a_0 a_2 - a_1^2 + a_2 a_0 = 1 \Rightarrow a_1^2 = -1 \Rightarrow a_1 = \pm i$

השוואת מקדמים לשאר החזקות $\leftarrow a_{n>1} = 0$

כלומר $f(z) = \pm iz$.