משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

עד עתה, למדנו לפתור משוואת דיפרנציאליות מסדר ראשון, משוואות הניתנות להפרדה ומשוואות ליניאריות מסדר ראשון, שהפתרון שלהן מתבסס על טכניקות מתמטיות קלאסיות.

כעת, נלמד לפתור משוואות שהפתרון שלהן מתבסס על חוקי שימור מפיזיקה.

חוקי שימור (לשאול פיזיקאי)

דוגמה

$$\boxed{y''(t) = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin(y)}$$

זוהי משוואה של מטוטלת, כאשר האנרגיה נשמרת.

$$E(y,t) = \frac{1}{2}m\ell^2 \cdot y'(t)^2 + mg\ell \cdot (1 - \cos(y))$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m\ell\big(\ell \cdot y'(t) \cdot y''(t) + g \cdot \sin(y) \cdot y'(t)\big) \\ &= m\ell y'(t) \cdot (\ell \cdot y''(t) + g \cdot \sin(y)) \end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$y''(t) = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

לכן, כל פתרון למשוואה:

$$y''(t) = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin(y)$$

הוא פתרון למשוואה:

$$E(y,t) = \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}m\ell^2\cdot y'(t)^2+mg\ell\cdot(1-\cos(y))=\text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\ell\cdot y'(t)^2+g\cdot(1-\cos(y))=c$$

וזו משוואה הניתנת להפרדה (!).

$$y'(t)=\sqrt{\frac{2g}{\ell}}\cdot\sqrt{\cos y-c}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\cos y-c}}=\sqrt{\frac{2g}{\ell}}\,dt$$

$$\blacksquare$$

דוגמה (מערכת $Lotka-Volterra$)

שתי פונקציות $p(t),q(t)$ מקיימות:

$$\boxed{\begin{cases}p'(t)=\alpha\cdot p(t)-\gamma\cdot p(t)\cdot q(t)\\ q'(t)=\gamma\cdot p(t)\cdot q(t)-\beta\cdot q(t)\end{cases}\quad,\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}}$$

פתרון

$$H(p,q)=\beta\cdot\log p+\alpha\cdot\log q-\gamma\cdot(p+q)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\beta}{p}\cdot p'(t)+\frac{\alpha}{q}\cdot q'(t)-\gamma\cdot p'(t)-\gamma\cdot q'(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dH}{dt}=\left(\frac{\beta}{p}-\gamma\right)\cdot(\alpha\cdot p-\gamma\cdot p\cdot q)+\left(\frac{\alpha}{q}-\gamma\right)\cdot(\gamma\cdot p\cdot q-\beta\cdot q)$$

$$\frac{dH}{dt} \equiv 0$$

■