נראה שעבור $p\neq\infty$ הפונקציונלים הליניאריים הרציפים $T:l^p\to\mathbb{R}$ הם בדיוק אילו מהצורה $T\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ עבור $(b_n)_{n=1}^{\infty}\in l^q$.

1. כיוון ראשון: אפשר לראות שלכל סדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}\in l^q$ הפונקציונל $T\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מוגדר היטב, ליניארי ורציף

(א) מוגדרות היטב והרציפות מתקיימים בגלל אי שיוויון הולדר. לכל $(a_n)_{n=1}^{\infty}\in l^p$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|\leq\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_p\|(b_n)_{n=1}^{\infty}\|_p<\infty$ ולכן הטור $T\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס בהחלט. ואם $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}-(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_p\leq\epsilon$ אז $T\left((x_n)_{n=1}^{\infty}-(y_n)_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)b_n\leq\|(x_n)_{n=1}^{\infty}-(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_p\|(b_n)_{n=1}^{\infty}\|_p\leq\epsilon\|(b_n)_{n=1}^{\infty}\|_p$ וזו רציפות במובן של ליפשיץ' (זה יותר חזק מרציפות רגילה)

(ב) ליניאריות היא מובנת מאליה, בהתחשב בהגדרת הפונקציונל. כל זה נכון גם ל־$p=\infty$.

2. כיוון שני:

(א) לכל פונקציונל ליניארי רציף $T:l^p\to\mathbb{R}$ נגדיר $b_n=T(e_n)$. לפי ליניאריות לכל סדרה סופית (סדרה עבורה יש $N>0$ ככה שלכל $n>N$ מתקיים $a_n=0$) מתקיים $T\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{N}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$.

(ב) למדנו שאם מגדירים $a_n^k=\begin{cases}a_n & n\leq k\\ 0 & n>k\end{cases}$ אז $\left\|(a_n)_{n=1}^{\infty}-(a_n^k)_{n=1}^{\infty}\right\|_p\xrightarrow{k\to\infty}0$ ולפי רציפות $T\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right)=\lim T\left((a_n^k)_{n=1}^{\infty}\right)=\lim\sum_{n=1}^{k}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$.

(ג) נוכיח ש: $(b_n)_{n=1}^{\infty}\in l^q$. בשביל זה צריך ש־ $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q<\infty$. נניח בשלילה שלא ונגדיר את הסדרה $c_n^k=\begin{cases}\dfrac{|b_n|^{\frac{q}{p}}sgn(b_n)}{\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}} & n\leq k\\ 0 & n>k\end{cases}$ ואז

$$\left\|(c_n^k)_{n=1}^{\infty}\right\|_p=\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{|b_n|^{\frac{q}{p}}}{\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}}\right)^p}=\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}\frac{|b_n|^q}{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}}=\sqrt[p]{1}=1$$

ולפי ליניאריות $\left\|\frac{\delta}{2}(c_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p=\frac{\delta}{2}<\delta$

מצד שני $T\left((c_n^k)_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{k}\frac{|b_n|^{\frac{q}{p}}sgn(b_n)}{\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}}=\sum_{n=1}^{k}\frac{|b_n|^{\frac{q}{p}}|b_n|}{\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}}=\sum_{n=1}^{k}\frac{|b_n|^{\frac{q}{p}+1}}{\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}}$

גנשים לב ש־ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ולכן $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}=\frac{q-1}{q}$ ולכן $\frac{q}{p}=q-1$ ו־ $\frac{q}{p}+1=q$

יוצא ש־ $T\left((c_n^k)_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{k}\frac{|b_n|^q}{\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}}=\frac{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}{\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}}=\left(\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}=$

$$\left(\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\to\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\infty$$

ושוב ולפי ליניאריות $T\left(\frac{\delta}{2}(c_n^k)_{n=1}^{\infty}\right)\to\infty$

בפרט לכל δ ישנה סדרה $\frac{\delta}{2}\left(c_n^k\right)_{n=1}^\infty \in l^p$ עבורה $\left\|\frac{\delta}{2}\left(c_n\right)_{n=1}^\infty\right\|_p < \delta$ אבל $\left|T\left(\frac{\delta}{2}\left(c_n^k\right)_{n=1}^\infty\right)\right| > 1$ זה סותר את רציפות T (לפי הגדרת רציפות רגילה, עם $\epsilon = 1$)

הנחנו ש־$p \neq 1, \infty$,

מה אם $p = 1$? אז $q = \infty$: ובשביל להראות ש־ $(b_n)_{n=1}^\infty \in l^\infty$. צריך להראות שזו סדרה חסומה, אבל זה ברור ־ אחרת לכל δ, M יש n עבורו $|b_n| > \frac{2}{\delta}M$ ולכן $T\left(\frac{\delta}{2}e_n\right) = M$ אבל $\left\|\frac{\delta}{2}e_n\right\|_p < \delta$ ־ אותה סתירה כמו קודם.

עבור $p = \infty$ כיוון 1 עדיין נכון ־ כל $T\left((a_n)_{n=1}^\infty\right) = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ הוא פונקציונל ליניארי רציף, אבל כיוון 2.ב לא נכון, ולכן ישנם עוד פונקציונליים ליניאריים רציפים שאינם מהצורה הזאת.