פתרון תרגיל 6 אינפי 1 תיכוניסטים תש"ף

2 בדצמבר 2019

1. שתי הטענות נכונות.

(א) מכיוון שהטור מתכנס, $a_n \longrightarrow 0$ ולכן קיים n_1 כך שלכל $n_1 < n$ מתקיים: $0 < a_n < \frac{1}{2}$. לכן, $\frac{1}{a_n} > 2$ ובפרט: $\frac{1}{a_n} \not\longrightarrow 0$ והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

(ב) באופן דומה לסעיף הקודם, קיים n_1 כך שלכל $n_1 < n$ מתקיים: $0 < a_n < \frac{1}{2}$ ולכן $[a_n] = 0$, כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n] = \sum_{n=1}^{n_1} [a_n] + 0$$

וזהו סכום סופי שמתכנס.

2. ננסה להציג את הטורים כטורים טלסקופיים.

(א) נפרק את $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ לשברים חלקיים, כלומר נחפש קבועים A, B, C עבורם:

$$\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

כלומר:

$$1 = A\,(n+1)\,(n+2) + B\,(n+2)\,n + C\,(n+1)\,n$$

הצבת $n = 0$ תיתן $A = \frac{1}{2}$, הצבת $n = -1$ תיתן $B = -1$ והצבת $n = -2$ תיתן $C = \frac{1}{2}$, כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}\right)$$

נבדוק אלו איברים לא מתבטלים. יש שלושה מחוברים, אז נרשום שלושה איברים עוקבים:

$$a_{n-1}+a_n+a_{n+1} = \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+2}\right)+\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}\right)+\left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n+6}\right)$$

האיבר האמצעי של a_n מתבטל ע"י האיבר השמאלי של a_{n-1} שלפניו והאיבר הימני של a_{n+1} שאחריו. כשנתבונן בסכום חלקי S_N, נקבל:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+4}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2N+2}-\frac{1}{N+2}+\frac{1}{2N+6}\right)$$

כפי שהסברנו, האיברים שנשארים הם:

$$S_N = \frac{1}{4}+\frac{1}{2N+2}-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{2N+4}$$

אחרי שהחציים בהתחלה ביטלו זה את זה, ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)} = \lim_{N\longrightarrow\infty} S_N = \frac{1}{4}$$

(ב) נסדר לפי חוקי הלוגריתם:

$$\ln\left(1-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2+2n}{\left(n+1\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{n\left(n+2\right)}{\left(n+1\right)^2}\right) =$$

$$= \ln n + \ln\left(n+2\right) - \ln\left(\left(n+1\right)^2\right) = \ln n + \ln\left(n+2\right) - 2\ln\left(n+1\right)$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln n + \ln\left(n+2\right) - 2\ln\left(n+1\right)\right)$$

איך נראה סכום חלקי?

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\ln n + \ln\left(n+2\right) - 2\ln\left(n+1\right)\right) =$$

$$= \left(\ln 1 + \ln 3 - 2\ln 2 + \ln 2 + \ln 4 - 2\ln 3 + \ln 3 + \ln 5 - 2\ln 4 + \cdots + \ln N + \ln\left(N+2\right) - 2\ln\left(N+1\right)\right)$$

$\ln 1 = 0$ וכל האיברים מתבטלים, למעט:

$$S_N = -\ln 2 + \ln\left(N+2\right) - \ln\left(N+1\right) = -\ln 2 + \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right)$$

כעת, $\frac{N+2}{N+1} \longrightarrow 1$ ולכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}\right) = \lim_{N\longrightarrow\infty} S_N = -\ln 2 + \ln 1 = -\ln 2$$