תרגיל 5

17 באפריל 2018

בדקו אם המד"רים הבאים מדוייקים. במידה וכן, פתרו אותם.

1. $(2x+y)dx + xdy = 0$
פתרון:

$X = 2x+y, Y = x$. $X_y = Y_x = 1$ לכן המד"ר מדוייקת. במקרה זה, קל לראות שפונקציית הפוטנציאל היא $F(x,y) = x^2 + yx$. לכן הפתרון הוא: $x^2 + yx = c$.

2. $2x + 4y + (2x-2y)y' = 0$
פתרון:

זה שקול למד"ר: $(2x+4y)dx + (2x-2y)dy = 0$. $X = 2x+4y, Y = 2x-2y$. $X_y = 4, Y_x = 2$. $X_y \neq Y_x$. לכן המד"ר לא מדויקת.

3. $2xy^2 + 2y + (2x^2y + 2x)y' = 0$
פתרון:

זה שקול למד"ר: $(2xy^2+2y)dx + (2x^2y+2x)dy = 0$. $X = 2xy^2 + 2y, Y = 2x^2y + 2x$. $X_y = Y_x = 4xy + 2$. לכן המד"ר מדוייקת. נפתור לפי האלגוריתם:

$F(x,y) = \int X dx + c(y) = x^2y^2 + 2xy + c(y)$.

כלומר, $Q(x,y) = x^2y^2 + 2xy$.

כעת, נמצא את $c(y)$.

$F_y = Q_y + c'(y) = Y$

$2x^2y + 2x + c'(y) = 2x^2y + 2x$

$c'(y) = 0$. זה אומר ש$c(y)$קבוע. אבל מכיוון שבצד השני של המשוואה יש קבוע, אז אפשר להתעלם ממנו, ולהניח ש$c(y) = 0$.

פונקציית הפוטנציאל היא: $F(x,y) = 2x^2y + 2x$

והפתרון הוא: $2x^2y + 2x = Constant$.

4. $(1 + y^2 + xy^2)dx + (x^2y + y + 2xy)dy = 0$
פתרון:

$X = 1 + y^2 + xy^2, Y = x^2y + y + 2xy$

$X_y = Y_x = 2y + 2xy$ לכן המד"ר מדוייקת.

נפתור לפי האלגוריתם.

.$F(x,y)=\int Xdx+c(y)=x+y^2x+\frac{x^2y^2}{2}+c(y)$

כלומר, $Q(x,y)=x+y^2x+\frac{x^2y^2}{2}$

כעת נמצא את $c(y)$.

$F_y=Q_y+c'(y)=Y$

$2yx+x^2y+c'(y)=x^2y+y+2xy$

כלומר, $c'(y)=y$

$c(y)=\frac{y^2}{2}$

פונקציית הפוטנציאל היא: $F(x,y)=x+y^2x+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2}$

והפתרון הוא: $x+y^2x+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2}=Constant$

5. $(ye^{xy}-2y^3)dx+(xe^{xy}-6xy^2-2y)dy=0$

פתרון:

$X=ye^{xy}-2y^3, Y=xe^{xy}-6xy^2-2y$

$X_y=Y_x=e^{xy}+yxe^{xy}-6y^2$ לכן המד"ר מדוייקת. נפתור לפי האלגוריתם.

$F(x,y)=\int Xdx+c(y)=e^{xy}-2y^3x+c(y)$

$Q(x,y)=e^{xy}-2y^3x$

כעת נמצא את $c(y)$.

$F_y=Q_y+c'(y)=Y$

.$xe^{xy}-6y^2x+c'(y)=xe^{xy}-6xy^2-2y$

$c'(y)=-2y$

$c(y)=-y^2$

פונקציית הפוטנציאל היא $F(x,y)=e^{xy}-2y^3x-y^2$

והפתרון הוא: $e^{xy}-2y^3x-y^2=Constant$

6. $(x^3+xy^2-y)+(y^3+x^2y-x)y'=0$

פתרון:

זה שקול למד"ר $(x^3+xy^2-y)dx+(y^3+x^2y-x)dy=0$.

$X=x^3+xy^2-y, Y=y^3+x^2y-x$

$X_y=Y_x=2xy-1$ לכן המד"ר מדוייקת. נפתור לפי האלגוריתם.

$F(x,y)=\int Xdx+c(y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-yx+c(y)$

$Q(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-yx$

כעת נמצא את $c(y)$.

$$F_y = Q_y + c'(y) = Y$$

$$.x^2y - x = y^3 + x^2y - x$$

$$c'(y) = y^3$$

$$c(y) = \frac{y^4}{4}$$

פונקציית הפוטנציאל היא $F(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{4} + \dfrac{x^2y^2}{2} - yx$

והפתרון הוא: $\dfrac{x^4 + y^4}{4} + \dfrac{x^2y^2}{2} - yx = Constant$