אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 6

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן. להגשה ב18.12 או ב21.12 בהתאם לשיעור התרגיל.

1) תהי G חבורה (לא אבלית). תהי A קבוצת כל האיברים מסדר סופי.

a. הוכיחו כי אם A תת-חבורה אזי היא נורמלית.

b. הוכיחו כי תת-החבורה הנוצרת ע"י האיברים מסדר סופי היא נורמלית.

פיתרון:

נניח כי A חבורה. יהי $a \in A$ ויהי $g \in G$. כעת $(g^{-1}ag)^{o(a)} = g^{-1}a^{o(a)}g = g^{-1}eg = g^{-1}g = e$, משמע $g^{-1}ag$ הוא מסדר סופי, ולכן שייך לA. משמע, A היא נורמלית.

נסמן בB את תת-החבורה הנוצרת ע"י איברים מסדר סופי. כל איבר בB הוא מכפלה של איברים הנוצרים סופית. יהי $b \in B$ ו$g \in G$. b הוא מכפלה של איברים מסדר סופי, כלומר קיימים איברים $a_1,\dots,a_n \in A$ כך ש $b = a_1 \dots a_n$. נביט ב$g^{-1}bg$. מתקיים השוויון $g^{-1}bg = g^{-1}a_1g \dots g^{-1}a_ng$. כבר ראינו כי לכל i, $g^{-1}a_ig$ הוא מסדר סופי, ולכן $g^{-1}bg$ הוא מכפלה של איברים מסדר סופי. משמע, B היא נורמלית.

2) הראו ש- $\langle g \rangle \le G$ היא תת-חבורה נורמלית אם ורק אם $hgh^{-1} \in \langle g \rangle$ לכל $h \in G$.

פיתרון:

הראו ש- $\langle g \rangle \le G$ היא תת-חבורה נורמלית אם לכל $a \in <g>$ ולכל $h \in G$ מתקיים $hah^{-1} \in <g>$. כעת, $a \in <g>$ אם ורק אם $a = g^n$ לאיזשהו $n \in \mathbb{Z}$.

אולם, $hah^{-1}=hg^nh^{-1}=(hgh^{-1})^n$, ולכן מכיוון ש $<g>$ סגורה לכפל, אם $hgh^{-1}\in\langle g\rangle$ אז $hah^{-1}\in<g>$. כלומר, אם $hgh^{-1}\in\langle g\rangle$ לכל $h\in G$ אזי לכל $a\in<g>$ ולכל $h\in G$ מתקיים $hah^{-1}\in<g>$.

בכיוון ההפוך, אם לכל $a\in<g>$ ולכל $h\in G$ מתקיים $hah^{-1}\in<g>$ אז בפרט $hgh^{-1}\in\langle g\rangle$ (משום ש $g\in<g>$).

3) תהי $G=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a>0\}$ עם הפעולה $(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)$. הראו ש $K=\{(a,0)\mid a>0\}$ היא תת-חבורה אבל אינה נורמלית.

פיתרון:

איבר היחידה הוא $(1,0)$ ורואים כי $(1,0)\in K$. לכל שני איברים ב K, $(a,0)$ ו$(b,0)$ מתקיים $(a,0)*(b,0)=(ab,0)\in K$. $(a,0)*(a^{-1},0)=(1,0)$ ולכן $(a,0)^{-1}=(a^{-1},0)\in K$. משמע, K היא תת-חבורה.

$(1,1)*(1,-1)=(1,0)$ ולכן $(1,1)^{-1}=(1,-1)$. $(2,0)\in K$.

$(1,1)*(2,0)*(1,-1)=(2,1)*(1,-1)=(2,-1)\notin K$ ולכן K לא נורמלית.

4) הראו שאם $H,K\le G$ וגם $[G:K]<\infty$ (K ת"ח מאינדקס סופי) אזי $[H:H\cap K]\le[G:K]$, כלומר גם $[H:H\cap K]<\infty$. (רמז: בנו פונקציה חח"ע מקבוצת המחלקות השמאליות של $H\cap K$ ב H, לקבוצת המחלקות השמאליות של K ב G).

פיתרון:

נסמן בA את קבוצת המחלקות השמאליות של $H \cap K$ ב H ובB את קבוצת המחלקות השמאליות של K ב G.

נגדיר פונקציה $f : A \to B$ לפי $f(gH \cap K) = gK$.

נראה כי פונקציה זו היא מוגדרת היטב: ניקח שני נציגים למחלקה שמאלית אחת $g_1H \cap K = g_2H \cap K$. אזי $g_1^{-1}g_2 \in H \cap K$. בפרט זה אומר ש $g_1^{-1}g_2 \in K$ ולכן $g_1K = g_2K$.

נראה כי פונקציה זו היא חח"ע: ניקח שני מקורות של אותה התמונה, $g_1H \cap K, g_2H \cap K \in A$ שעבורם $f(g_1H \cap K) = f(g_2H \cap K)$. מצד אחד, משום ש $g_1H \cap K, g_2H \cap K$ הן מחלקות שמאליות של $H \cap K$ ב H, מתקיים $g_1, g_2 \in H$, ובפרט $g_1^{-1}g_2 \in H$. מאידך, $g_1K = f(g_1H \cap K) = f(g_2H \cap K) = g_2K$ ולכן $g_1^{-1}g_2 \in K$. סה"כ נובע ש $g_1^{-1}g_2 \in H \cap K$ ולכן $g_1H \cap K = g_2H \cap K$.

5) הראו שאם $H, K \le G$ $[G:K] < \infty$ וגם $[G:H] < \infty$ אזי $[G:H \cap K] < \infty$. (רמז: השתמשו בשאלה 4, ובמשפטים לגבי האינדקס שראיתם בשיעור/תרגול).

פיתרון:

$[G:H \cap K] = [G:H] \cdot [H:H \cap K]$. לפי סעיף 4, מכיוון ש $[G:K] < \infty$, מתקיים $[H:H \cap K] < \infty$. כעת, משום שנתון כי $[G:H] < \infty$, מקבלים את המבוקש.