① אינטגרל מסוים לפי רימן

הגדרות:

1) יהי $[a,b]$ קטע סגור.

$$P: a < x_1 < \dots < x_n = b$$

נקרא חלוקה של $[a,b]$. (נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$)

2) חלוקה מנוקדת של $[a,b]$: היא חלוקה ונתון גם בחירה של נקודות

$$d_1 \in [x_0, x_1], \dots, d_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

3) סכום רימן המתאים לחלוקה המנוקדת:

$$\sigma(P) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(d_k)$$

4) הנורמה של החלוקה

$$\lambda(P) = \max(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$$

5) פונקציה היא אינטגרבילית ב $[a,b]$
אם לכל סדרת חלוקות מנוקדות P_n כך ש $\lambda(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(d_k)\Delta x_k$$

* חלוקה שימושית: חלוקה שווה כלומר נחלק את $[a,b]$ ל n קטעים שווי אורך כלומר:

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \lambda(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

עבור חלוקה שווה ניתן לבחור נקודות d_k בצורה הבאה:

1) נקודת קצה ימנית:

$$d_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

2) נק' קצה שמאלית:

$$d_k = a + \frac{(k-1)}{n}(b-a)$$

דוגמה - חשבו את האינטגרל

$$\int_0^5 (5-x)\,dx = \lim_{\lambda(P_n)\to 0} \sum_{k=1}^{n} (5-c_k)\Delta x_k$$

~~[illegible]~~ נבחר)

$$\Delta x_k = \frac{5}{n}$$

$$c_k = \frac{5k}{n}$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(5-\frac{5k}{n}\right)\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum \frac{25}{n} - \sum \frac{25k}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{25}{n}\cdot n - \frac{25}{n^2}\sum k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(25 - \frac{25}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) =$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad = \cancel{\lim_{n\to\infty}}\ 25 - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}$$

תרגיל: השתמשו באינטגרל מסוים כדי לחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 1^2}{n^4}} + \sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 2^2}{n^4}} + \dots + \sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16n^2}{n^4}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16k^2}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-\frac{4k^2}{n^2}} = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi 2^2 = \pi$$

תרגיל: חשבו את הגבול הבא.

$$a_n = \frac{1^3+2^3+\dots+n^3}{n^4}$$

פתרון:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

תרגיל: 3

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(\sqrt[n]{n+k}) - \ln(\sqrt[n]{n}) \right]$$

פתרון:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\ln\left(\sqrt[n]{\frac{n+k}{n}}\right) \right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln(2)-1$$

תרגיל: נניח ש- $f(x)$ פונק' חסומה ואינטגרבילית
רימן - בקטע $[0,4]$. כמו כן נניח שלכל תת-
קטע $I \subset [0,4]$ קיימת לפחות (נקודה) אחת
$x_0 \in I$ כך ש $f(x_0) \leq 2$.
הוכיחו ש- $\int_0^4 f(x)\,dx \leq 8$

פתרון: אזי חלוקה כלשהי של $[0,4]$.
ניקח סכום רימן של הפונקציה: ולכל חלק נבחר
(נקודה) כך ש- $f(c_i) \leq 2$.

$$\int_0^4 f(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda(P_n)\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(c_k) \leq \overset{\text{לכן}}{\lim_{n\to\infty}} 2\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k =$$

$$= 2(4-0) = 8$$

תרגיל: נניח c מספר ממשי, $f(x)$ אינטגרבילית
בקטע $[a,b]$ כך שלכל (נקודה) רציונלית בקטע
מתקיים $f(x)=c$. הוכח כי בהכרח:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$$

④ <u>פתרון</u> f אינטגרבילית. אזי P_n סדרת חלוקות

של $[a,b]$ ולכל $[x_{k-1},x_k]$ נבחר $d_k\in\mathbb{Q}$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda(P_n)\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(d_k)\Delta x_k=$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda(P_n)\to 0}} C\sum\Delta x_k=C(b-a)$$

<u>הגדרה:</u> תהא $f(x)$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$

ותהי P חלוקה של הקטע ~~P=a~~

נסמן:

$$m_k=\inf_{x\in I_k} f(x)$$

$$M_k=\sup_{x\in I_k} f(x)$$

סכום

$$\underline{S}(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$$

$$\bar{S}(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$$

<u>הגדרה</u> תהא T חלוקה של $[a,b]$. T' תקרא עידון

של $[a,b]$ אם היא מכילה את כל הנקודות של T

ולפחות עוד נקודה אחת.

<u>משפט</u> (תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו)

אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ותהי $\{T_n\}$

סדרה של חלוקות של $[a,b]$ כך שלכל $1\le k\le n$

חלוקה T_k היא עידון של החלוקה T_{k-1}

אזי

$$\underline{S}(T_0)\le\underline{S}(T_1)\le\quad\le\underline{S}(T_n)\le\int_a^b f(x)\le\bar{S}(T_n)\le\ldots\le\bar{S}(T_0)$$

<u>משפט</u> פונקציה f היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה T של הקטע

כך ש

$$|\bar{S}(T)-\underline{S}(T)|<\varepsilon$$

5 תרגיל

הוכיחו כי:

$$\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2} \le \pi \le 1+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}$$

הוכחה: נתבונן בפונקציה

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

בקטע $[0,1]$. כי פונקציה רציפה בקטע, ולכן אינטגרבילית בו. נבחר חלוקה:

$$T: 0<0.25<0.5<0.75<1$$

$$\Delta x_k=\frac{1}{4}$$

לכל I_k

$f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,1]$ ולכן סכום דרבו התחתון הוא:

$$\underline{S}(T)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}+\sqrt{1-1^2}\right)$$

כי הערך המינימלי של הפונקציה בכל תת-קטע מתקבל בקצה הימני שלו. באופן דומה, סכום דרבו העליון הוא

$$\overline{S}(T)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0^2}+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)$$

כי הערך המקסימלי של הפונקציה בכל תת-קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו. כמו כן ידוע לנו כי השטח של רבע מעגל היחידה הוא

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

לפי אי-שוויון המונוטוניות של סכומי דרבו

$$\underline{S}(T)\le\int_0^1\sqrt{1-x^2}\le\overline{S}(T)$$

Scanned by CamScanner

6) תרגיל: תהא $f(x)$ מונוטונית עולה ממש בתחום $[0,1]$

סדרו את הערכים הבאים מהקטן ביותר לגדול ביותר

1) $f(0)$

2) $f(1)$

3) $\frac{1}{3}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

4) $\frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right)$

5) $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i-1}{300}\right)$

6) $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i}{300}\right)$

7) $\int_0^1 f(x)\,dx$

<u>פתרון</u> (חלקי)

$T_0: 0<1$

$T_1: 0<\frac{1}{3}<\frac{2}{3}<1$

$T_2: 0<\frac{1}{300}<\frac{2}{300}< \dots <\frac{299}{300}<1$

$$\underline{S}(T_0)\le\underline{S}(T_1)\le\underline{S}(T_2)\le\int_0^1 f(x)\le\overline{S}(T_2)\le\overline{S}(T_1)\le\overline{S}(T_0)$$

כיוון ש- f מונוטונית, מתקיים:

$\underline{S}(T_0)=f(0)$

$\overline{S}(T_0)=f(1)$

$\underline{S}(T_1)=\frac{1}{3}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

$\overline{S}(T_1)=\frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right)$

$\underline{S}(T_2)=\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i-1}{300}\right)$

$\overline{S}(T_3)=\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i}{300}\right)$