פתרון תרגיל בית 6 – מופשטת קיץ 2013

שאלה 1

א. מצא כמה לוחות 3×3 לא שקולים קיימים (עד כדי סימטריות של הריבוע) אם מותר לצבוע ב-2 צבעים.

ב. כמה לוחות 5×5 לא שקולים (לגבי הסיבובים) קיימים אם מותר לצבוע את הלוחות ב- 3 צבעים קבועים.

פתרון

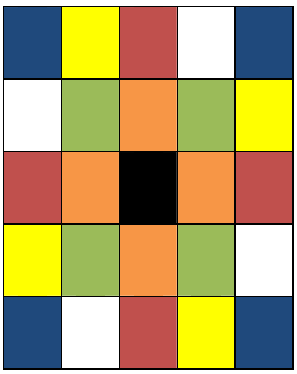
א. נגדיר את מרחב הפעולה ככל הצביעות האפשריות של הלוח:
$X=\{f:\{1,2,3,...,9\}\to\{0,1\}\}$, ונפעל עליו עם החבורה הדיהדרלית D_4.
נחשב את כל הגדלים הדרושים:

$g\in D_4$	$\lvert X_g\rvert$	סה"כ
id	2^9	2^9
σ,σ^3	2^3	$2\cdot2^3$
σ^2	2^5	2^5
$\tau,\sigma\tau,\sigma^2\tau,\sigma^3\tau$	2^6	$4\cdot2^6$

לבסוף נקבל על פי משפט ברנסייד כי מספר המסלולים הינו 102, שכן מתקיים: $k=\frac{1}{8}\left(2^9+2\cdot2^3+2^5+4\cdot2^6\right)=102$.

ב. הלוחות שקולים עד כדי סיבובים, ז"א שהחבורה הפועלת תהיה $A=\{id,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}\le D_4$ כאשר σ הוא סיבוב ב- 90° בכיוון השעון. נסמן ב- X את אוסף כל הצביעות האפשריות. מתקיים $X=(\mathbb{Z}_3)^{25}$. נרצה להשתמש בלמה של ברנסייד ולכן עלינו לחשב את מספר נקודות השבת בפעולה של כל אחד מאיברי החבורה.

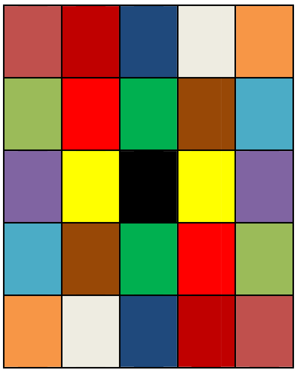
$\lvert X_{id}\rvert=3^{25}$, שכן תמורת הזהות אינה מזיזה את הריבוע ולכן מותר לנו לצבוע כל משבצת כרצוננו. $\lvert X_\sigma\rvert=3^7$, שכן קל להשתכנע כי σ שומרת במקומם ריבועים מהצורה:



[שימו לב שאין חשיבות לצבעים בתמונה; הצבעים השונים נועדו לסמן את המשבצות שאמורות להיות באותו צבע]. ניתן לראות שיש לנו חופש לבחור לצבוע 7 משבצות ב-3 צבעים, וכל שאר המשבצות יקבעו בהתאם.

$\left|X_{\sigma^3}\right|=3^7$, שכן σ^3 היא סיבוב ב- 90° נגד כיוון השעון (ולכן היא מתנהגת כמו σ).

$\left|X_{\sigma^2}\right|=3^{13}$, שכן היא משאירה במקום ריבועים מהצורה:



בסה"כ נקבל: מספר המסלולים השונים (משמע, מספר הצביעות השונות) הוא: $k=\frac{1}{4}\left(3^{25}+2\cdot 3^7+3^{13}\right)$.

מש"ל

שאלה 2

תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל $1\neq x\in G$, x אינו צמוד להופכי שלו.

(שימו לב שיש יותר מדרך אחת לפתור שאלה זו, אך על מנת לתרגל את המושגים הטריים יותר, נסו לפתור אותה באמצעות מחלקות צמידות).

פתרון

יהי $1\neq x\in G$ ונניח בשלילה שהוא צמוד לעצמו, כלומר $x^{-1}\in conj\left(x\right)$. לכן מחלקת השקילות של x מכילה לפחות שני איברים. היא אינה יכולה להיות מסדר זוגי (כי סדרה חייב לחלק את סדר החבורה) ולכן קיים $y\neq x,x^{-1}$ שנמצא במחלקת השקילות של x. נניח בה"כ ש- y צמוד ל-x. לכן y^{-1} צמוד ל-x^{-1}

(מדוע?) ולכן גם $y^{-1}\in conj(x)$. ושוב יש מספר זוגי של איברים (וודאו ש- y^{-1} אכן שונה מכל האיברים במחלקה). ממשיכים בתהליך דומה עד אשר "נגמרים" האיברים בחבורה, ואנחנו נשארים עם סתירה. ☺

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

רשמו את משוואת המחלקות עבור החבורות S_4,S_5,D_4.

למשל: משוואת המחלקות של D_6 היא $12=2+3+3+2+2$.

<u>פתרון</u>

עבור $n\geq 3$ $Z(S_n)$ טריוויאלי. מחלקת צמידות נתונה ב S_n מורכבת מכל התמורות בעלות מבנה מחזורים זהה עבור איזשהו מבנה מחזורים.

משוואת המחלקות של S_4 היא $24=1+6+8+6+3$. כאשר בכל אחת ממחלקות הצמידות $\{(--)\},\{(----)\}$ שישה איברים, במחלקת הצמידות $\{(---)\}$ שמונה איברים ובמחלקת הצמידות $\{(--)(--)\}$ שלושה איברים.

מהי משוואת המחלקות של S_5? גודל מחלקת הצמידות $\{(--)\}$ הוא $\binom{5}{2}=10$.

גודל מחלקת הצמידות $\{(---)\}$ הוא $\binom{5}{3}2!=20$. גודל מחלקת הצמידות $\{(----)\}$ הוא $\binom{5}{4}3!=30$. גודל מחלקת הצמידות $\{(-----)\}$ הוא $4!=24$

גודל מחלקת הצמידות $\{(--)(--)\}$ הוא $\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{2}=15$. גודל מחלקת הצמידות $\{(---)(--)\}$ הוא $\binom{5}{3}2!=20$.

מכאן משוואת המחלקות של S_5 היא $120=1+10+20+30+24+15+20$.

מהי משוואת המחלקות של D_4?

הוכחנו בתרגול את הטענה הבאה: עבור חבורת- p לא אבלית G מסדר p^3 מתקיים $|Z(G)|=p$ וגם לכל $a\notin Z(G)$ מתקיים $|conj(a)|=p$. מכאן כל מחלקת צמידות מגודל $1<$ היא מגודל p ומשוואת המחלקות של חבורה מסוג זה היא: $p^3=\underbrace{p+p+\cdots+\cdots+p}_{p^2\quad times}$. בפרט אצלנו D_4 לא אבלית מסדר $8=2^3$ לכן משוואת המחלקות שלה היא: $8=2+2+2+2$.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

תנו דוגמאות לחבורה:

א. פתירה ופשוטה;

ב. פתירה ולא פשוטה;

ג. לא פתירה ופשוטה;

ד. לא פתירה ולא פשוטה.

<u>פתרון</u>

א. $(\mathbb{Z}_p,+)$ עבור p ראשוני היא אבלית ולכן פתירה. כמו כן היא פשוטה היות ול- $\mathbb{Z}_p$ אין תת חבורות נורמליות לא טריוויאליות.

[שימו לב שזהו הפתרון היחיד. שכן, אם החבורה היא פשוטה אזי סדרת ההרכב שלה היא $G\rhd\{1\}$. בגלל הפתירות מקבלים שהחבורה אבלית. וחבורה אבלית (סופית, כמובן) היא פשוטה אמ"מ היא מסדר ראשוני.]

ב. למשל, כל חבורה מסדר pq (ראו את התרגיל הקודם), או למשל S_4, או כל D_n.

ג. A_n עבור $n\geq 5$.

ד. S_n עבור $n\geq 5$.

מש"ל

שאלה 5

תהא G חבורה מסדר p^2q (עבור p,q ראשוניים) הוכיחו ש- G פתירה.

פתרון

ראינו בתרגול שיש ל-G תת חבורה נורמלית שהיא או p-סילו או q-סילו. אם $n_q=1$ אזי תת החבורה q-סילו Q היא מסדר q. במקרה זה נתבונן בסדרה הנורמלית: $G\rhd Q\rhd\{e\}$. אזי $\left|G/Q\right|=p^2$ ולכן G/Q אבלית; $Q/\{e\}\cong\mathbb{Z}_q$ אבלית; ולכן G פתירה.

אם $n_p=1$ אז תת החבורה p-סילו P היא מסדר p^2. נתבונן בסדרה הנורמלית: $G\rhd P\rhd\{e\}$. אזי $\left|G/P\right|=q$ ולכן $G/P\cong\mathbb{Z}_q$ אבלית; $P/\{e\}\cong P$ וגם $|P|=p^2$ ולכן P חבורה אבלית; לכן G פתירה.

מש"ל

שאלה 6

א. תהא G חבורה מסדר 34. הוכיחו שהיא פתירה.

פתרון

$34=2\cdot17$ ולכן $G\cong\mathbb{Z}_{34}$ או $G\cong D_{17}$ ובכל אחד מהמקרים הללו G פתירה.

ב. תהא G חבורה עם: 20,52 או 175 איברים. הוכיחו ש G לא פשוטה.

פתרון

אלה הן חבורות מסדר p^2q והראינו בכיתה שחבורות אלה אינן פשוטות.

ג. הוכיחו או הפריכו: אין חבורה פשוטה מסדר 125.

פתרון

$125=5^3$. זוהי חבורת p ולכן המרכז שלה אינו טריוויאלי. אבל המרכז הוא תת-חבורה נורמלית ולכן יש תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית והחבורה אינה פשוטה.

שימו לב: יתכן והחבורה היא אבלית, ואז המרכז הוא אמנם תח"נ אך טריויאלית. אך גם במקרה כזה החבורה אינה פשוטה, שכן, חבורה אבלית סופית היא פשוטה אמ"מ היא מסדר ראשוני.

ד. תהא G חבורה מסדר 1645 או 9797. הוכיחו ש G ציקלית.

פתרון

לגבי 9797:

9797=101*97 ולכן אם G חבורה מסדר 9797 אז ע"פ המשפט על חבורות מסדר pq, G ציקלית.

לגבי 1645:

1645 = 5*7*47. ניתן לראות ש – $n_{47}=n_7=n_5=1$. שלוש תתי החבורות הללו הן ציקליות ונורמליות. נסמן: $H_{47}=\langle c\rangle$, $H_7=\langle b\rangle$, $H_5=\langle a\rangle$.

לכן, לפי טענה מהתרגול, G היא מכפלה ישרה של החבורות הללו. כלומר, $G\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_{47}\cong\mathbb{Z}_{1645}$ ולכן ציקלית.

ה. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 15,16,17 היא אבלית.

פתרון

17- ראשוני ולכן כל חבורה מסדר זה היא ציקלית, ולכן אבלית.

16 – לא נכון. D_8 היא מסדר 16 אך היא לא אבלית.

15- מתקיים $5\neq 1\pmod 3\ \wedge\ 15=3\cdot 5$ ולכן החבורה ציקלית ולכן אבלית.

ו. הוכיחו שחבורה מסדר 42 אינה פשוטה.

פתרון

קל לבדוק שמתקיים $n_7=1$ ולכן יש חבורת 7-סילו נורמלית.

ז. הוכיחו שחבורה מסדר 130 אינה פשוטה, ומצאו חבורה לא אבלית מסדר זה.

פתרון

קל לבדוק ש- $n_{13}=1$ ולכן יש חבורת 13-סילו נורמלית. מכאן החבורה אינה פשוטה. דוגמה לחבורה לא אבלית, אינה פשוטה מסדר 130: $D_{13}\times\mathbb{Z}_5$.

מש"ל

שאלה 7

א. הוכיחו: תהי K תת חבורת p סילו של G, ותהי $H\lhd G$. אזי $H\cap K$ היא תת חבורת p סילו של H.

ב. תנו דוגמה נגדית במקרה ש- H אינה נורמלית.

פתרון

א. ראשית הכוונה היתה ש $p \,\|\, |H|$. אחרת אין כלל תת חבורת p סילו ל-H.

סדרי כל האיברים, פרט ליחידה, ב- $H \cap K$ הם חזקות של p, שכן סדר כל איבר ב- $H \cap K$ מחלק את הסדר של K. לכן $H \cap K$ חבורת p.
נראה שכל חבורת p שהינה ת"ח של H מוכלת בצמוד של $H \cap K$
כלומר בחבורה מהצורה $g\left(H \cap K\right)g^{-1} \cong H \cap K$ עבור איזשהו $g \in G$.
מכאן נסיק שתת החבורה $H \cap K$ היא תת חבורת p מקסימלית של H
וש- $H \cap K$ היא תת חבורת p-סילו של H. לצורך זה תהי M תת חבורת
p של H כלשהי. אזי היא בפרט תת חבורת p של G. כעת, K תת
חבורת p-סילו של G ומכאן קיים $g \in G$ כך ש $M \subseteq gKg^{-1}$. מצד שני
$H \triangleleft G$ ולכן $M \subseteq H = gHg^{-1}$. בסה"כ נקבל ש
$M \subseteq gHg^{-1} \cap gKg^{-1} = g(H \cap K)g^{-1}$ כדרוש.

ב. תהי $K = \langle \tau \rangle$, $G = D_3$ תת חבורת 2-סילו של G ותהי $H = \langle \tau\sigma \rangle = \{id, \tau\sigma\}$.

אזי H בעצמה תת חבורת 2-סילו של G אבל $H \cap K$ היא טריוויאלית.

מש"ל

שאלה 8

תהי $N \triangleleft G$ ויהי $f: G \to G/N$ ההומומורפיזם הטבעי. (הכל סופי). הוכיחו שהתמונה של כל תת חבורת p-סילו של G, היא תת חבורת p-סילו של G/N
(שימו לב שהתמונה היא PN/N).

פתרון

ניתן להניח שמתקיים $|G| = p^k r, |N| = p^s t$ כאשר $p^{s+1} \nmid |N|, \quad p^{k+1} \nmid |G|$ וכן $s \le k$ ו $t \mid r$. כעת, תהי P ת"ח p-סילו של G אזי סדרה הוא p^k. מתקיים:

$\left|G/N\right| = \frac{|G|}{|N|} = p^{k-s}\frac{r}{t}$. מ"ל ש- $\left|PN/N\right| = p^{k-s}$. עפ"י משפט האיזומורפיזם השני

$\left|PN/N\right| = \left|P/P \cap N\right| = \frac{|P|}{|P \cap N|} = \frac{p^k}{|P \cap N|}$. כעת, עפ"י שאלה קודמת ידוע ש-

$P\bigcap N$ היא תת חבורת p-סילו של N ולכן $|P\cap N|=p^s$ שכן $|N|=p^s t$. לכן,

$p^{k-s}=\frac{p^k}{p^s}=\frac{p^k}{|P\cap N|}=\frac{|P|}{|P\cap N|}=\left|{}^{P}\!/_{P\cap N}\right|=\left|{}^{PN}\!/_{N}\right|$ כדרוש.

מש"ל

<u>שאלה 9</u>

הוכיחו שכל חבורה מסדר 88 היא פתירה.

<u>פתרון</u>

$88=2^3\cdot 11$. $n_{11}\mid 8\wedge n_{11}\equiv 1\pmod{11}$ ולכן $n_{11}=1$. מכאן קיימת תח"נ 11-סילו ל- G;
נסמנה H. תת החבורה H היא ציקלית מסדר ראשוני ולכן אבלית ופתירה.
${}^{G}\!/_{H}$ חבורת p, שכן סדרה הוא 2^3 ולכן היא פתירה. מכיון ש H ו- ${}^{G}\!/_{H}$ פתירות
נקבל עפ"י משפט ש- G פתירה.

מש"ל