בתחילת השנה למדנו על הזזות וכפל במקרה החד מימדי, הינה סיכום של זה:

1. לכל קטע $[a,b],(a,b],[a,b),(a,b)$ יש מידה $b-a$. הקטעים מהצורה $(a,b]$ מהווים חצי חוג ולכן ניתן לחשב את המידה רק לפיהם, אבל ניתן לעשות זאת גם לפי כל הקטעים שכן קבוצת כל הטעים היא גם חצי חוג. אם כן מידה של קבוצה שווה ל־ $\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(I_n\right)|E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, I_n\text{are intervals}\right\}$. נשים לב ש־

   (א) לכל קטע $I$ $cI+d$ הוא קטע ו־ $\mu\left(cI+d\right)=\left|c\right|\mu\left(I\right)$.

   (ב) הכיסויים של הקבוצה $cE+d$ הם בדיוק ההקבוצות מהצורה $\bigcup_{n=1}^{\infty}cI_n+d$ כאשר $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ הם כיסויים של $E$

   (ג) ולכן $\mu\left(cE+d\right)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(I_n\right)|cE+d\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, I_n\text{are intervals}\right\}=$ $\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(cI_n+d\right)|E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, I_n\text{are intervals}\right\}=\left|c\right|\mu\left(E\right)$.

2. אם הקבוצה $E$ מדידה אז לכל $A$ $\mu\left(A\right)=\mu\left(A\cap E\right)+\mu\left(A\cap E^c\right)$ ואז $\mu\left(A\right)=\left|a\right|\mu\left(\frac{1}{a}A-\frac{b}{a}\right)=\left|a\right|\mu\left(\left(\frac{1}{a}A-\frac{b}{a}\right)\cap E\right)+\left|a\right|\mu\left(\left(\frac{1}{a}A-\frac{b}{a}\right)\cap E^c\right)=\mu\left(A\cap aE+b\right)+$ $\mu\left(A\cap aE^c+b\right)=\mu\left(A\cap aE+b\right)+\mu\left(A\cap\left(aE+b\right)^c\right)$ ולכן הקבוצה $aE+b$ מדידה.

3. יש מקרה קצה שבו $a=0$ ואז $\mu\left(aE+b\right)=\mu\left(\{b\}\right)=0=\left|a\right|\mu\left(E\right)$ וכן $aE+b=\{b\}$ מדידה.

4. אם פונקציה $f$ מדידה אז $g\left(x\right)=f\left(ax+b\right)$ מדידה כי אם $\{x\in X|f\left(x\right)<c\}$ מדידה לכל $c$ אז $\{x\in X|g\left(x\right)<c\}=\{x\in X|f\left(ax+b\right)<c\}=\left\{\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\in X|f\left(x\right)<c\right\}=\frac{1}{a}\{x\in X|f\left(x\right)<c\}-\frac{b}{a}$ מדידה לכל $c$. שוב יש מקרה קצה שבו $a=0$ אבל אז $g\left(x\right)=f\left(ax+b\right)$ מדידה כי היא קבועה.

5. $\int g\left(x\right)dm\left(x\right)=\int f\left(ax+b\right)dm\left(x\right)=\frac{1}{\left|a\right|}\int f\left(x\right)dm\left(x\right)$. לפונקציות אינדיקטור זה טריוואילי. לפונקתיות מדרגה זה נכון בגלל ליניאריות, ולפונציות כלליות זה נכון כי ניתן לקרב אותן ע"י פונק' מדרגה.

בבמקרה הרב מימדי:

1. לפי ליניארית, כל מקבילון סגור $r$ מימדי' ב־ $\mathbb{R}^n$ הוא התמונה של פונקציה מהצורה $T(\bar{x}) = A\bar{x} + b$ עבור $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$ עם $r = rank(A)$ על ה־$n$־קוביה הסגורה הסטנדרטית $[0,1]^n$. ז"א שהמקבילון הוא מהצורה $P = T([0,1]^n) = A\cdot[0,1]^n + b$. בשביל לקבל מקבלון פתוח לוקחים תמונה של קוביה פתוחה. זה נכון גם למקבילונים "חצי פתוחים", הם תמונות של קוביה חצי פתוחה כמו למשל $[0,1]\times[0,1)\times(0,1]$ ב־ $\mathbb{R}^3$. בכל מקרה נפח המקבילון הוא $\int_R 1_P dm = |det(A)|$ (זה אינטגרל רימן).

2. מקבילון סגור הוא קבצה סגורה וחסומה. מקבילון פתוח או חצי פתוח הוא שווה למקבילון הסגור פחות כמה מהצלעות שלו, ולכן הוא קבוצה סגורה פחות מספר סופי של קבוצות סגורות, בכל מקרה זאת קבוצה מדידה וחסומה, ולכן $m(P) = \int_L 1_P dm$ מוגדר וסופי (זה אינטגרל לבג). בפרט אינט' רימן ולבג שווים פה, ולכן $m(P) = \int_L 1_P dm = \int_R 1_P dm = |det(A)|$.

3. אם נפעיל פונקציה מהצורה $T(\bar{x}) = A\bar{x} + b$ על מקבילון $P$ עם נפח $v$, מה נקבל? לפי 1. $P = S([0,1]^n) = C\cdot[0,1]^n + d$ כאשר $|det(C)| = v$. אם כך $T(P) = T(S([0,1]^n)) = A(C([0,1]^n) + d) + b = AC([0,1]^n) + (Ad + b)$ וזה מקבילון בנפח $|det(AC)| = |det(A)\,det(C)| = |det(A)|\,|det(C)| = |det(A)|\,v$. בפרט לכל מלבן פתוח / סגור / חצי פתוח $P$ $m(T(P)) = |det(A)|\,m(P)$.

4. תהי קבוצה כלשהי $\Omega$, לכל $\epsilon > 0$ ישנו אוסף בן מנייה של מלבנים מדידים $E_k = F_k^1 \times F_k^2 \times ... \times F_k^n$ כך ש־ $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < m^*(\Omega) + \epsilon$ ו־ $\Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. לכל $E_k$ יש מלבן פתוח $O_k$ עבורו $E_k \subseteq O_k$ ו $m(O_k) < m(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$ ולכן $\Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$ ו־ $\sum_{k=1}^{\infty} m(O_k) < m^*(\Omega) + 2\epsilon$. בפרט $T(\Omega) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} T(O_k)$ ולכן $m^*(T(\Omega)) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(T(O_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} |det(A)|\,m(O_k) < |det(A)|\,m^*(\Omega) + 2|det(A)|\,\epsilon$. זה נכון לכל $\epsilon > 0$ ולכן $m^*(T(\Omega)) \le |det(A)|\,m^*(\Omega)$. אם $|det(A)| = 0$ אז $m^*(T(\Omega)) = 0 = |det(A)|\,m^*(\Omega)$. אחרת $T$ הפיכה וחישוב דומה על $T^{-1}$ יתן ש־ $m^*(\Omega) = m^*\left(T^{-1}(T(\Omega))\right) \le \left|det\left(A^{-1}\right)\right| m^*(T(\Omega)) = \frac{1}{|det(A)|} m^*(T(\Omega))$ ולכן $m^*(T(\Omega)) \ge |det(A)|\,m^*(\Omega)$ ולכן $m^*(T(\Omega)) = |det(A)|\,m^*(\Omega)$.

5. כעת, סעיפים 2-5 במקרה החד מימדי פועלים גם פה, ולכן העתקה ליניארית משמרת קבוצות מדידות, פונק' מדידות ו- $\int f\left(A\bar{x}+b\right)dm\left(x\right)=\frac{1}{|det(A)|}\int f\left(x\right)dm\left(x\right)$.