פתרונות (3)

1. נניח ו H הינו מרחב הילברט עם בסיס בן מנייה ונניח כי $\|x_n\| \to \|x\|$ כאשר $n \to \infty$ וגם $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ לכל $y \in H$ כאשר $n \to \infty$. הוכיחו כי $\|x_n - x\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

פתרון: מכיוון שיש לנו בסיס בן מנייה $\{\varphi_n\}$ נוכל לרשום $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n \varphi_n$ וגם $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_n$.
למדנו כי $a_k = \langle x, \varphi_k\rangle$ וגם כי $a_k^n = \langle x_n, \varphi_k\rangle$ ולכן מהנתון כי $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ נובע כי $a_k^n \to a_k$ ומהנתון כי $\|x_n\| \to \|x\|$ נובע כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n|^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$. אנחנו צריכים להוכיח כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 \to 0$ כאשר $n \to \infty$. ברור כי $|a_k^n - a_k|^2 \le |a_k^n|^2 + |a_k|^2$ ולכן עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |a_k^n - a_k|^2 = 0$

2. נניח ו (X, S, μ) הינו ממ"ח ונניח כי $K : X \times X \to \mathbb{R}$ הינה מדידה $S \times S$. נניח כי קיים $M < \infty$ כך ש

$$\int |K(x,y)| \mu(dx) < M$$

לכל x. וגם כי

$$\int |K(x,y)| \mu(dy) < M$$

לכל y. אם f מדידה נגדיר

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y) \mu(dy)$$

כאשר האינטגרל קיים.

i. הוכיחו כי $\|Tf\|_1 \le M \|f\|_1$.

פתרון: עפ"י הגדרה

$$\|Tf\|_1 = \int \left| \int K(x,y) f(y) \mu(dy) \right| \mu(dx) \le \int \int |K(x,y) f(y)| \mu(dy) \mu(dx)$$

$$\int \left(\int |K(x,y)| \mu(dx) \right) |f(y)| \mu(dy) \le \int M |f(y)| \mu(dy) = M \|f\|_1$$

ii. אם $1 < p < \infty$, הראו כי $\|Tf\|_p \le M \|f\|_p$.

פתרון: עפ"י הגדרה

$$\|Tf\|_p=\left(\int\left|\int K(x,y)\,f(y)\,\mu(dy)\right|^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int\left(\int\left|K(x,y)\,f(y)\right|\mu(dy)\right)^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}$$

נסתכל על

$$\int\left|K(x,y)\,f(y)\right|\mu(dy)=\int\left|K(x,y)^{\frac{p-1}{p}}K(x,y)^{\frac{1}{p}}f(y)\right|\mu(dy)$$

$$\le\left(\int\left|\left(K(x,y)^{\frac{p-1}{p}}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}\mu(dy)\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\left|\left(K(x,y)^{\frac{1}{p}}f(y)\right)\right|^p\mu(dy)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int\left|K(x,y)\right|\mu(dy)\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int K(x,y)\left(f(y)\right)^p\mu(dy)\right)^{\frac{1}{p}}\le M^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\left|K(x,y)\left(f(y)\right)\right|^p\mu(dy)\right)^{\frac{1}{p}}$$

נציב ביטוי הקודם ונקבל עפ"י הסעיף הראשון

$$\|Tf\|_p=\left(\int\left(M^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\left|K(x,y)\left(f(y)\right)\right|^p\mu(dy)\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(M^{\frac{(p-1)p}{p}}\int\left(\int\left|K(x,y)\left(f(y)\right)\right|^p\mu(dy)\right)\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\left(M^{\frac{(p-1)p}{p}}\left\|Tf^p\right\|_1\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(M^{\frac{(p-1)p}{p}}M\|f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=M^{\frac{p-1}{p}}M^{\frac{1}{p}}\|f\|_p=M\|f\|_p$$

3. ענו על הבאים:

א. הגדירו את l^p עבור $1\le p\le\infty$ והראו כי $l^p\subset l^\infty$.

ב. הוכיחו שאם נשרה את נורמת l^∞ על l^1 אז הוא לא מרחב שלם.

פתרון:

א. נדלג על ההגדרה. ברור כי על מנת שהטור $\sum|x|^p$ יתכנס חייב להתקיים כי $\sup x_n<\infty$
.

ב. ניקח את הסדרה $x^n = \begin{cases} 1/i & 1 \le i \le n \\ 0 & otherwise \end{cases}$, קל לראות כי היא קושי ב l^∞ אבל לא מתכנסת לאיבר ב l^1 .

4. ראינו בהרצאה כי המרחב $L^2([0,1],\mathrm{m})$ הינו מרחב מכפלה פנימית ביחס למכפלה הפנימית $\langle f,h\rangle = \int f(x)h(x)dm(x)$. תארו את המרחב האורתוגונלי לוקטור $f(x)=1$.

פתרון: נדרוש כי

$$\langle f,h\rangle = \int f(x)h(x)dm(x) = 0 \Rightarrow \int 1\cdot h(x)dm(x) = 0$$

כלומר אנו דורשים כי האינטגרל על הפונקציה יהיה 0.

5. מצאו קבוצה אורתונורמלית למרחב ההנפרש ע"י הוקטורים $\{1,x,x^2\}$ בקטע $[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,h\rangle = \int f(x)h(x)dm(x)$.

פתרון: נבנה את הקבוצה: הוקטור $v_1 = 1$ הינו אותונורמלי כבר ביחס למרחב המכפלה הפנימית שלנו ולכן נשאיר אותו כמו שהוא. קל לראות כי הוקטור השני $v_2 = x$ גם אורתוגונלי ל 1 . את הוקטור השלישי נמצא כך

$$v'_3 = x^2 - \langle x^2,1\rangle 1 - \langle x^2,x\rangle x = x^2 - \frac{2}{3}$$

שימו לב כי הוקטור החדש הינו אורתוגונלי לוקטורים v_1,v_2 . כעת נשאר לנו לנרמל את הוקטור v_3 . נחשב ונמצא כי

$$\int\left(x^2 - \frac{2}{3}\right)^2 dx = \frac{3}{2}$$

ולכן נקבל כי $v_3 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$. התהליך שעשינו על מנת לקבל בסיס אורתונורמלי מקבוצה של וקטורים פורשים נקרא תהליך גרם שמידט. הוקטורים אותם מצאנו נקראים וקטורי לז'נדר.

6. נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות סיגמא סופיות כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ. תהי $\rho=\mu+\nu$. שימו לב כי $\mu \ll \rho$ וגם כי $\nu \ll \rho$. הוכיחו כי אם $f=\frac{d\mu}{d\rho}$ ו $g=\frac{d\nu}{d\rho}$ אזי

א. $f>0$ כב"מ μ.

ב. $f+g=1$ כב"מ ρ.

ג. $d\nu=\frac{g}{f}d\mu$.

פתרון:

א. מהנתון כי $\mu \gg \nu$ נובע כי $\mu \gg \rho$. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי לכל A מדידה מתקיים

$$\mu(A)=\int_A fd\rho$$

נניח בשלילה ש א' אינו מתקיים. אזי קיימת בהכרח קבוצה מדידה E כך ש $\mu(E)>0$ וגם $f=0$ על E. אבל אז $\mu(E)=\int_A fd\rho=0$. בסתירה להנחה ש $\mu(E)>0$.

ב. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי $\mu(A)=\int_A fd\rho$ וגם כי $\nu(A)=\int_A gd\rho$ לכל A מדידה. מכאן שעבור כל A מדידה נובע כי

$$\begin{aligned}&\int 1_A(f+g)d\rho=\int 1_A fd\rho+\int 1_A gd\rho\\&=\mu(A)+\nu(A)=\rho(A)=\int 1_A d\rho\end{aligned}$$

לכן נובע כי $f+g=1$ כב"מ ρ.

ג. קודם כל נתחיל בהערה, ע"י קירוב של פונקציות פשוטות נראה כי אם $z(x)$ פונקציה מדידה אזי נובע כי אם $\int zd\nu<\infty$ וגם $\int zd\mu<\infty$ אזי $\int zd\mu=\int zfd\rho$ וגם $\int zd\nu=\int zgd\rho$. לכן נסמן לפעמים $d\nu=gd\rho$. עפ"י משפט רדון ניקודים והנתון, נובע כי קיימת פונקציה חיובית h כך ש $\nu(A)=\int 1_A hd\mu$ לכל A מדידה. מצד שני

$$\begin{aligned}&\int 1_A gd\rho=\nu(A)=\int 1_A hd\mu=\\&\int 1_A hd\mu=\int 1_A hfd\rho\end{aligned}$$

ומכאן ש כב"מ ρ $g=fh \Leftarrow h=\frac{g}{f}$.

7. יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות כך ש $\mu \ll \nu$ ו $\mu = gd\nu$. הראו כי אם f פונקציה אינטגרבילית ביחס למידה μ אזי היא אינטגרבילית ביחס למידה ν ומתקיים

$$\int fgd\nu = \int fd\mu$$

פתרון: נרשום $f = f^+ + f^-$. נקרב את f^+ ע"י פונקציות פשוטות φ_n כך ש $\int \varphi_n d\mu \uparrow \int fd\mu$. נשים לב כי עבור כל פונקציית אינדיקטור מתקיים $\int 1_A fd\nu = \int 1_A d\mu$. ולכן הדבר נכון גם עבור פונקציות פשוטות. מכאן שמתקיים $\int f^+ gd\nu \overset{MCT}{=} \lim \int \varphi_n gd\nu = \lim \int \varphi_n d\mu = \int f^+ d\mu$. נראה את אותו הדבר עבור f^- וסיימנו.