תרגיל 11 – אלגברה מופשטת 1

1. תהי G חבורה סופית ו P,N תת חבורות שלה. הוכיחו את הטענות הבאות.

1.1. אם P,N הן חבורות- p כך ש $PN=NP$ (ובפרט PN היא תת חבורה של G), אזי PN היא חבורת- p.

הוכחה: $|PN|=[PN:N]|N|=[P:P\bigcap N]|N|=\frac{|P||N|}{|P\cap N|}$.

(שימו לב כי השוויון באינדקסים $[PN:N]=[P:P\bigcap N]$ נכון גם אם N אינה תת חבורה נורמלית).

מכיוון שהסדר של P והסדר של N הוא חזקה של p, נקבל שגם הסדר של PN הוא חזקה של p. לכן, PN היא חבורת p.

1.2. נניח כי $PN=NP$, P היא תת חבורה p-סילו של G ו N היא חבורת- p. אזי $N\le P$.

הוכחה: מכיוון ש $P\le NP$, P היא תת חבורה p-סילו של G ולפי הסעיף הקודם, NP היא חבורת- p, נובע מהמקסימליות של חבורות p-סילו כי $NP=P$. לכן, $N\le NP=P$.

1.3. אם P היא תת חבורה p-סילו של G ו N היא חבורת- p המוכלת במנרמל $N_G(P)$ אז $N\le P$.

הוכחה: לפי הסעיף הקודם מספיק להוכיח כי $PN=NP$.

נראה את ההכלה $PN\subseteq NP$. ההכלה בכיוון ההפוך דומה.

יהיו $p\in P,n\in N$. צ"ל כי $pn\in NP$. אבל, $pn=nn^{-1}pn=n\left(n^{-1}pn\right)$. מכיוון ש $n\in N\subseteq N_G(P)$, האיבר $n^{-1}pn\in P$. לכן, $pn=n\left(n^{-1}pn\right)\in NP$.

2. תהי G חבורה אינסופית פשוטה, ותהי H תת חבורה אמיתית של G. הוכיחו ש- $[G:H]=\infty$.

רמז: העידון של משפט קיילי.

פתרון: נניח בשלילה ש- $[G:H]=n<\infty$. לפי העידון של משפט קיילי, H מכילה תת חבורה נורמלית $N\triangleleft G$ עבורה $[G:N]\,\big|\,n!$. מכאן $[G:N]<\infty$.

מכיוון ש- G פשוטה ו- $N\neq G$ (כי $N\subseteq H$) נקבל ש- $N=\{1\}$. לכן $[G:N]=|G|=\infty$, וזאת סתירה.

3. הוכיחו: אם G חבורה פשוטה מסדר גדול משתיים וקיימת לה תת חבורה H מאינדקס n, אזי אפשר לשכן את G ב- A_n.

פתרון: לפי עידון של משפט קיילי קיים שיכון של G ב-S_n. נתבונן בעותק של G בתוך S_n ונמשיך לקרוא לו G למען הנוחות. מתקיים $G\bigcap A_n \triangleleft G$ ולכן, מכיוון ש-G פשוטה, מתקיים אחד מהשניים: $G\bigcap A_n=\{id\}$ או $G\bigcap A_n=G$. האפשרות הראשונה אינה אפשרית. הסבר: מתקיים $2=[S_n:A_n]\ge[G:G\bigcap A_n]$ ולכן נקבל $[G:\{id\}]=|G|\le 2$ בסתירה להנחה. לכן $G\bigcap A_n=G$ וזה מוכיח הדרוש.

4. הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 אינה פשוטה.

פתרון: בכל חבורה מסדר $120=2^3\cdot 3\cdot 5$, n_5 מחלק את 24 ושקול ל-1 מודולו 5, ולכן הוא שווה ל-1 או ל-6. נניח בשלילה שהחבורה פשוטה, ולכן $n_5=6$ ולכן $[G:N_G(P_5)]=6$ ולכן לפי העידון של משפט קיילי יש שיכון $G\hookrightarrow S_6$.
נקרא לעותק של G בתוך S_6 גם כן G.
ייתכנו שתי אפשרויות:
א. $G\le A_6$
ב. G לא מוכלת ב A_6.
במקרה ב' $G\cap A_6<G$ הוא תת חבורה ממש. לכן, האינדקס $[G:G\cap A_6]\ne 1$.
מכיוון ש $[G:G\cap A_6]=[GA_6:A_6]\le[S_6:A_6]=2$, האינדקס $[G:G\cap A_6]=2$.
בפרט, $G\cap A_6\triangleleft G$ היא תת חבורה נורמלית לא טרוויאלית. (אכן, מכיוון שהאינדקס שלה הוא 2, היא לא הזהות). בסתירה להנחה.
לכן, $G\le A_6$. נובע שהאינדקס $[A_6:G]=3$. אבל, לפי תרגיל שהוכחנו בכיתה, כל תת חבורה של A_6 היא מאינדקס גדול או שווה לשש. סתירה.

5. הוכיחו את הסעיפים הבאים:

5.1 אוטומורפיזם נקבע על-ידי התמונות של קבוצת יוצרים

פתרון : תהי G חבורה, $\{x_1,...,x_k\}$ קבוצת יוצרים ו- $f:G\to G$ אוטומורפיזם. נסמן $f(x_i)=y_i$ לכל $1\le i\le k$. יהי $a\in G$ אזי קיימים יוצרים $x_{i_1},...,x_{i_r}$ ומספרים טבעיים $\alpha_1,...,\alpha_t$ כך ש- $a=x_{i_1}^{\alpha_1}\cdot...\cdot x_{i_t}^{\alpha_t}$. לכן

$$f(a)=f\left(x_{i_1}^{\alpha_1}\cdot...\cdot x_{i_t}^{\alpha_t}\right)=f\left(x_{i_1}\right)^{\alpha_1}\cdot...\cdot f\left(x_{i_t}\right)^{\alpha_t}=y_{i_1}^{\alpha_1}\cdot...\cdot y_{i_t}^{\alpha_t}.$$

5.2 אוטומורפיזם מעביר מחלקת צמידות למחלקת צמידות (רמז: הראו שאם x,y צמודים, אזי גם התמונות שלהם תחת אוטומורפיזם צמודות).

פתרון: תהי G חבורה ויהיו x,y שני איברים צמודים. כלומר, קיים $g\in G$ כך ש- $x=gyg^{-1}$. יהי $f:G\to G$ אוטומורפיזם. מתקיים:

$f\left(x\right)=f\left(gyg^{-1}\right)=f\left(g\right)f\left(y\right)f\left(g\right)^{-1}$ ולכן $f\left(x\right),f\left(y\right)$ צמודים.

5.3 אוטומורפיזם שומר על התחלפות ועל אי-התחלפות (רמז: הוא הפיך).
פתרון: תהי G חבורה ויהיו x,y שני איברים מתחלפים. יהי $f:G\to G$ אוטומורפיזם. מתקיים: $f\left(x\right)f\left(y\right)=f\left(xy\right)=f\left(yx\right)=f\left(y\right)f\left(x\right)$. בדרך דומה מראים את הטענה על אי-התחלפות.

6. תהי G חבורה סופית לא אבלית ונניח $|G|>2$. הוכיחו כי $\left|Aut\left(G\right)\right|\geq 2$.

רמז: התבוננו באוטומואפיזמים פנימיים.

פתרון: קודם כל, $Id\in Aut\left(G\right)$, וכן לכל $g\in G$ מתקיים $\gamma_g\in Aut\left(G\right)$. אם $\gamma_g\neq Id$, סיימנו. מתי זה קורה? אם $g\notin Z\left(G\right)$.

לכן, מכיוון ש G אינה אבלית, ניתן לקחת איבר לא מרכזי $g\in G$ ויתקיים $Id,\gamma_g\in Aut\left(G\right)$ (מה שמוכיח הדרוש).

7. הוכיחו: לכל שתי חבורות G,H יש שיכון $Aut(G)\times Aut(H)\hookrightarrow Aut(G\times H)$.
פתרון: נגדיר $F:Aut\left(G\right)\times Aut\left(H\right)\to Aut\left(G\times H\right)$ על-ידי $F(\varphi,\psi)=\varphi\times\psi$ כאשר $\left(\varphi\times\psi\right)(f,g)=\left(\varphi(f),\psi(g)\right)$. ניתן לבדוק שאם $\varphi\in Aut\left(G\right)$ וכן $\psi\in Aut\left(H\right)$ אז $\varphi\times\psi\in Aut\left(G\times H\right)$ (בדקו!)
נוכיח ש- F מונומורפיזם. תחילה נוכיח הומומורפיזם:
$F\left((\varphi_1,\psi_1)(\varphi_2,\psi_2)\right)=F(\varphi_1\varphi_2,\psi_1\psi_2)=\varphi_1\varphi_2\times\psi_1\psi_2$,
$F(\varphi_1,\psi_1)\circ F(\varphi_2,\psi_2)=\left(\varphi_1\times\psi_1\right)\circ\left(\varphi_2\times\psi_2\right)$. עלינו להראות ששתי הפונקציות שוות.
לכל $(g,h)\in G\times H$ מתקיים $\left(\varphi_1\varphi_2\times\psi_1\psi_2\right)(g,h)=\left(\varphi_1\varphi_2(g),\psi_1\psi_2(h)\right)$ וכן
$\left(\varphi_1\times\psi_1\right)\circ\left(\varphi_2\times\psi_2\right)(g,h)=\left(\varphi_1\times\psi_1\right)\left(\left(\varphi_2\times\psi_2\right)(g,h)\right)=\left(\varphi_1\times\psi_1\right)\left(\varphi_2(g),\psi_2(h)\right)=$
$=\left(\varphi_1\varphi_2(g),\psi_1\psi_2(h)\right)$. חח"ע נובעת מחח"ע בכל רכיב.

8. תהי G חבורה סופית, ו- $\varphi\in Aut\left(G\right)$ אוטומורפיזם שנקודת השבת היחידה שלו היא איבר היחידה. הוכיחו: לכל $g\in G$ קיים $x\in G$ כך ש- $g=x^{-1}\varphi\left(x\right)$.

רמז: הגדירו פונקציה $f:G\to G$ על ידי $x\mapsto x^{-1}\varphi\left(x\right)$.

פתרון: נתבונן בהעתקה $f:G\to G$ המוגדרת על ידי $x\mapsto x^{-1}\varphi\left(x\right)$. נראה שהיא חח"ע. אכן, אם $f\left(x\right)=f\left(y\right)$ אזי $x^{-1}\varphi\left(x\right)=y^{-1}\varphi\left(y\right)$ ולכן $yx^{-1}=\varphi\left(y\right)\varphi\left(x\right)^{-1}=\varphi\left(yx^{-1}\right)$. אך מכיוון שנקודת השבת היחידה היא איבר

היחידה, מתקיים $yx^{-1}=1$ ולכן $x=y$. מכאן נובע ש- f על. כלומר לכל $g\in G$ קיים $x\in G$ כך ש- $g=f\left(x\right)=x^{-1}\varphi\left(x\right)$.

בהצלחה! ☺