מופשטת 2-הגדרות:

1. חוג הוא קבוצה R עם פעולות בינאריות ·, + ואיברים 1,0 כך ש-

א. $(R,+,0)$ חבורה אבלית

ב. $(R,\cdot,1)$ מונואיד

ג. $\forall a,b,c\in R: (a+b)c=ac+bc\ ,\ a(b+c)=ab+ac$

2. $a,b\in R$ מתחלפים אם $ab=ba$ (אם כל שני איברים של R מתחלפים, R חוג קומוטטיבי)

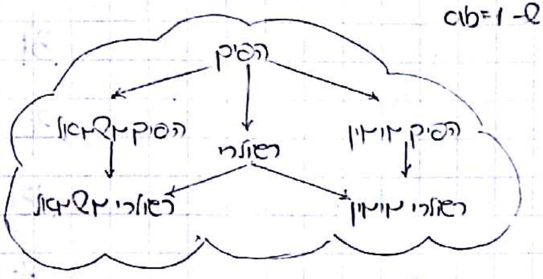
3. חוג בלי יחידה הוא קבוצה R עם פעולות ·, + ואיבר 0 כך שמתקיימות האקסיומות של חוג, למעט ש-$(R,\cdot)$ חבורה למחצה (במקום מונואיד)

4. יהי R חוג בלי יחידה, נאמר ש-$e\in R$ יחידה ימנית אם $\forall x\in R: xe=x$, נאמר ש-$e\in R$ יחידה שמאלית אם $\forall x\in R: ex=x$

5. $e\in R$ נקרא אידמפוטנט אם $e^2=e$

6. יהי R חוג, $a\in R$ הפיך משמאל אם קיים $b\in R$ כך ש-$ba=1$, $a\in R$ הפיך מימין אם קיים $b\in R$ כך ש-$ab=1$

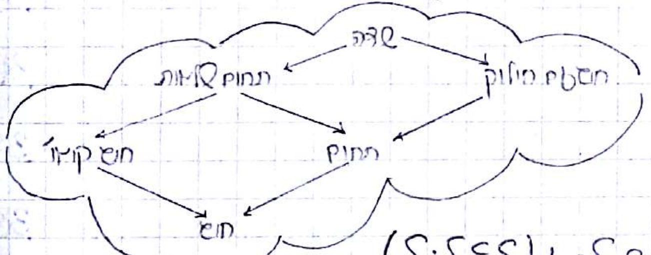
$a\in R$ הפיך אם קיים $b\in R$ כך ש-$ab=ba=1$



7. חוג שכל האיברים ($\neq 0$) הפיכים נקרא חוג עם חילוק

8. חוג קומוטטיבי עם חילוק נקרא שדה.

9. יהי R חוג, $a\in R$ הוא רגולרי מימין אם $\begin{cases} x=0 \Leftarrow xa=0 \\ x=y \Leftarrow xa=ya \end{cases}\equiv$. $a\in R$ הוא רגולרי משמאל אם $\begin{cases} x=0 \Leftarrow ax=0 \\ x=y \Leftarrow ax=ay \end{cases}\equiv$



10. a רגולרי $\Longleftrightarrow$ a רגולרי מימין + a רגולרי משמאל

11. חוג שכל האיברים ($\neq 0$) רגולריים נקרא תחום

12. תחום קומוטטיבי נקרא תחום שלמות

13. יהי R חוג, תת-חוג הוא תת קבוצה $\emptyset\neq S\subseteq R$ הסגורה לחיבור ונגדי, סגורה לכפל וכך ש-$1_R\in S$ $(S\cdot S\subseteq S)$

(כאשר R חוג בלי יחידה, S הוא תת חוג בלי יחידה אם הוא תת קבוצה הסגורה לחיבור, נגדי, וכפל)

14. יהי R חוג. תת חבורה חיבורית L נקראת אידיאל שמאלי אם $\forall x\in R, \forall a\in L: xa\in L$ $(R\cdot L\subseteq L)$. סימון: $L\leq_{\ell} R$

L נקראת אידיאל ימני אם $\forall x\in R, \forall a\in L: ax\in L$ $(L\cdot R\subseteq L)$ סימון: $L\leq_{R} R$.

L נקרא אידיאל (=אידיאל דו-צדדי) אם הוא גם אידיאל ימני וגם אידיאל שמאלי. סימון: $L\triangleleft R$ $(RL+LR\subseteq L)$

15. $a,b\neq 0$ מחלקי אפס אם $ab=0$

16. איבר $x\in R$ נקרא נילפוטנטי אם קיים n כך ש-$x^n=0$

17. תהיינה $A,B\subseteq R$ תתי חבורות לחיבור. נגדיר את המכפלה $A\cdot B=\{a_1b_1+\dots+a_nb_n \,/\, \begin{smallmatrix}a_1,\dots,a_n\in A\\ b_1,\dots,b_n\in B\end{smallmatrix}\}$ (תהיה תת חבורה לחיבור)

18. יהי I אידיאל של R. חוג המנה R/I הוא חבורת המנה R/I ביחס לכפל: $(a+I)(b+I)=ab+I$

19. הומומורפיזם של חוגים $\varphi:R\longrightarrow S$ הוא פונ' שומרת חיבור, כפל ויחידה. $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$, $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$, $\varphi(1_R)=1_S$

20. יהי $I\triangleleft R$. ההטלה $R\longrightarrow R/I$ מוגדרת ע"י $a\longmapsto a+I$ (זהו הומומורפיזם של חוגים - שהוא על)

21. המרכז של R: $Z(R)=\{a\in R \,/\, \forall r\in R,\ ar=ra\}$ (הוא תת חוג)

22. R,S חוגים, נגדיר "מכפלה ישרה": $R\times S=\{(x,y) \,/\, x\in R,\ y\in S\}$

23. נניח ש-R_λ חוגים $(\lambda\in\Lambda)$, אזי $\prod_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda=\{f:\Lambda\longrightarrow\bigcup R_\lambda \,/\, \forall\lambda\in\Lambda: f(\lambda)\in R_\lambda\}$ זה חוג עם הפעולות רכיב רכיב

24. נניח ש-R_λ חוגים $(\lambda\in\Lambda)$, אזי הסכום הישר מוגדר כ- $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda=\{f \,/\, f(\lambda)=0 \text{ כמעט תמיד}\}\subseteq\prod R_\lambda$

25. לכל חוג R ולכל $n\geq1$, $M_n(R)=\{(\vdots\ \vdots\ \vdots)\}$ הוא חוג ביחס לחיבור וכפל מטריצות

26. אומרים $\{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}\subseteq S$ נקראים "מערכת יחידות מטריציאליות" אם $\mathcal{E}_{ij}\cdot\mathcal{E}_{kl}=\delta_{jk}\mathcal{E}_{il}$ וגם $\sum\mathcal{E}_{ij}=1_S$

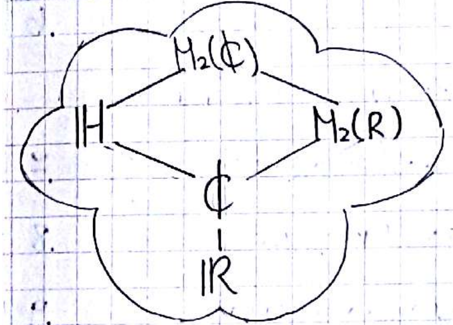
27. חוג האנדומורפיזמים של חבורה אבלית A הוא $End(A)=\{f:A\longrightarrow A \text{ הומומו'}\}$ עם פעולות החיבור וההרכבה

28. יהי R חוג, $R[x]$ הוא אוסף הביטויים מהצורה $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ כך ש-$a_i\in R$, החיבור הטבעי והכפל: $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\cdot\sum_{j=0}^{m}b_jx^j=\sum_{k=0}^{n+m}(\sum_{i+j=k}a_ib_j)x^k$

29. נגדיר הומומ' $\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow R$ ע"י $n\longmapsto\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ פעמים}}$. תת החוג הראשוני של R הוא $Im\varphi$ (מכילים 1 + והקטן ביותר)

30. תת החוג הנוצר ע"י X מעל R_0 כאשר $R_0\subseteq R$ תת חוג, $X\subseteq R$ הוא $R_0[X]=\bigcap_{R_0,X\subseteq S\subseteq R}S$

31. נניח ש- $R_1\subseteq R_2\subseteq\dots$ שרשרת של חוגים. נגדיר $R=\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n$ - חוג.



32. אם A חוג שהמרכז שלו מכיל שדה $\mathbb{F}$, אזי A נקרא מעל $\mathbb{F}$, A נקראת אלגברה מעל $\mathbb{F}$

33. הקווטרניונים של המילטון: $\mathbb{H}=\{\begin{pmatrix}x & y\\ -\bar{y} & \bar{x}\end{pmatrix} \,/\, x,y\in\mathbb{C}\}\subseteq M_2(\mathbb{C})$

34. אידיאל $M\triangleleft R$ הוא מקסימלי אם אין אידיאלים $M\subsetneq M'\subsetneq R$

35. יהי X מ"ט. $C(X)=\{f:X\longrightarrow\mathbb{C} \,/\, f \text{ רציפה}\}$

36. חוג R נקרא פשוט אם אין לו אידיאלים אמיתיים $\neq\{0\}$

37. $I,J\triangleleft R$ הם קו-מקסימליים אם $I+J=R$ (שקול לכך ש- J מקס' + $I\not\subseteq J$, אזי I,J קו-מקס')

38. חוג קומוטטיבי R נקרא מקומי אם יש לו אידיאל מקסימלי יחיד (יש $M\triangleleft R$ מקסימלי וכל $I\triangleleft R$ מוכל ב-M)

39. שדה עם יחס סדר לינארי כך שמכפלה של חיוביים היא חיובית הוא שדה סדור $(0<1)$ $(\Leftarrow Char\mathbb{F}=0 \Leftarrow \mathbb{Q}\subseteq\mathbb{F})$

40. $\mathbb{F}$ ארכימדי אם: (התכונות הבאות שקולות)

א. לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ קיים $n>\alpha$ (אין "אינסופיים")

ב. $\mathbb{Q}$ צפופה

ג. לכל $a>0$ קיים n כך ש- $\frac{1}{n}<a$ (אין "אינפיניטסימליים")

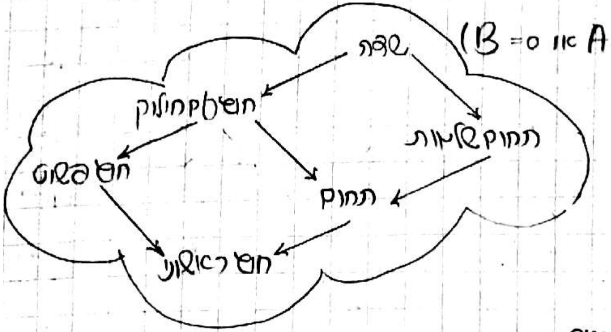
ד. לכל $a,b>0$ קיים n כך ש- $a<nb$

41. $\mathbb{F}$ שדה שלם סדרתית אם כל סדרת קושי מתכנסת

42. שדה שלם קיום של חסמים אם לכל קבוצה חסומה יש חסם עליון

43. יהי שדה $\mathbb{F}$ ארכימדי. נסמן $\mathbb{F}^*$ שדה הארכימדי השלם כך ש- $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{F}^*$ $(\mathbb{F}^*\subseteq K^* \Longleftarrow \mathbb{F}\subseteq K)$

44. $\{\text{סדרות המתכנסות ל-}0\} \big/ \{\text{סדרות קושי ב-}\mathbb{Q}\} =: \mathbb{R}$ זהו השדה הארכימדי השלם היחיד ($\mathbb{F}$ ארכימדי $\Longleftarrow \mathbb{Q}\subseteq\mathbb{F}\subseteq\mathbb{R}$)



45. R הוא חוג ראשוני אם לכל $A,B\triangleleft R \neq \{0\}$, אז $AB\neq\{0\}$ (אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$)

46. נאמר ש-S "הרחבה מרכזית" של תת חוג R אם $R\cdot Z(S)=S$

47. יהי R חוג חילופי, אידאל $P\triangleleft R$ הוא ראשוני אם לכל $A,B\triangleleft R$,
אם $AB\subseteq P$ אז $A\subseteq P$ או $B\subseteq P$

48. R חוג, $S\subseteq R$ קבוצה כך ש-S סגורה לכפל, S מוכלת במרכז, כל איברי S רגולריים.
נגדיר $S^{-1}R=\{\frac{a}{s} / s\in S, a\in R\}$, זהו חוג.

49. חוג ריבועי הוא מהצורה
$$O_D=\begin{cases}\mathbb{Z}[\sqrt{D}]=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{D} & D\equiv 2,3 \pmod 4\\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{D}}{2}]=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{D}}{2} & D\equiv 1 \pmod 4\end{cases}$$
מוגדר רק כאשר D חופשי מריבועים [illegible] $D\not\equiv 0 \pmod 4$

50. נגדיר יחס חלוקה על R, היחס משרה יחס שקילות, $a\sim b \Longleftrightarrow a|b,\ b|a \Longleftrightarrow \exists u\in U(R): b=ua$
יש יחס חלוקה על המחלקות, $[a]=\{ua / u\in U(R)\}$, $[a]\,|\,[b] \Longleftrightarrow a|b$ וזהו יחס סדר

51. נגדיר שתי פונקציות: $T,N: O_D \longrightarrow \mathbb{Z}$ ע"י: $T(x)=x+\bar{x}$, $N(x)=\bar{x}x$ $(N(a+b\sqrt{D})=a^2+Db^2, T(a+b\sqrt{D})=2a)$

52. פירוק טריוויאלי של איבר x הוא פירוק $x=y\cdot z$ כך ש y או z הפיכים ($x\sim z$ או $x\sim y$)

53. איבר (לא אפס ולא הפיך) נקרא אי פריק אם אין לו פירוק לא טריוויאלי (שקול ל- $x=yz \Rightarrow y$ או z הפיכים)

54. איבר $p\in R$ ($\neq 0$, לא הפיך) נקרא ראשוני אם $p|ab$ $(ab\in\langle p\rangle) \Longrightarrow p|b$ $(b\in\langle p\rangle)$ או $p|a$ $(a\in\langle p\rangle)$

55. תחום שלמות נקרא אטומי אם לכל איבר ($\neq 0$, לא הפיך) קיים פירוק לגורמים אי-פריקים

56. חוג מקיים את תנאי השרשרת העולה לאידאלים ראשיים (ACCP) אם כל שרשרת עולה של אידאלים ראשיים נעצרת (אין שרשרת עולה ממש)

57. חוג נקרא נתרי אם הוא מקיים את תנאי השרשרת העולה לאידאלים (שמאליים) כלומר כל שרשרת של אידאלים (שמאליים) חייבת להיעצר

58. תחום שלמות נקרא תחום פריקות יחידה (תפ"י - UFD) אם לכל איבר ($\neq 0$, לא הפיך) יש פירוק יחיד לגורמים אי פריקים (עד כדי סדר וחברות)

59. חוג מקיים את התכונה IP אם כל אי פריק הוא ראשוני (כלומר, אי פריק = ראשוני)

60. תחום נקרא תחום (אידאלים) ראשי (PID) אם כל האידאלים שלו ראשיים

61. חוג מקיים את תנאי בזו אם כל אידאל נוצר סופית הוא ראשי (שקול לכך שלכל a,b קיים d כך ש: $Ra+Rb=Rd$)

62. תחום שלמות R הוא אוקלידי אם קיימת $d: R-\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ כך ש- (נוהג להגדיר $d(0)=-\infty$)
א. $a|b \Longrightarrow d(a)\leq d(b)$
ב. $\forall b\neq 0\ \forall a: \exists q,r: a=qb+r,\ d(r)<d(b)$

63. יהי R תחום שלמות עם שדה שברים $\mathbb{F}=q(R)$. R נקרא תחום הערכה אם $\forall x\in\mathbb{F}: (x\in R \vee x^{-1}\in R)$

64. "חבורה סדורה ליניארית" היא חבורה אבלית Γ עם יחס סדר ליניארי (מלא) כך ש $\alpha<\beta \Longrightarrow \alpha+\gamma<\beta+\gamma$

65. הערכה של שדה $\mathbb{F}$ היא פונקציה $\nu:\mathbb{F}^\times\longrightarrow\Gamma$ כאשר Γ חבורה סדורה ליניארית כך ש- $\nu(ab)=\nu(a)+\nu(b)$ ו- $\nu(a+b)\geq\min\{\nu(a),\nu(b)\}$

66. נניח שבהינתן הערכה $\nu:\mathbb{F}^\times\longrightarrow\Gamma$, נגדיר $\nu(0)=\infty$. נקבל ש- $O_\nu=\{x/\nu(x)\geq 0\}$, הוא תת-חוג של $\mathbb{F}$ ($\Longleftarrow$ תחום שלמות)

67. נגדיר $I_\nu=\{x/\nu(x)>0\}$. הוא אידיאל של O_ν: $I_\nu\triangleleft O_\nu$ ($O_\nu^\times=\{x/\nu(x)=0\}\Longleftarrow$ שדה השארית: O_ν/I_ν)

68. הערכה $\nu:\mathbb{F}^\times\longrightarrow\Gamma$ נקראת "הערכה בדידה נורמלית" אם $\Gamma\cong\mathbb{Z}$

69. תחום הערכה של הערכה בדידה נורמלית נקרא DVR (Discrete Valuation Ring) "תחום הערכה בדידה/דיסקרטית"

70. נגדיר $k((x))=\{\sum_{i=-N}^{\infty}a_ix^i/\overset{N\in\mathbb{N}}{a_i\in k}\}$ ונסמן $k[[x]]=\{\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i/a_i\in k\}$ (תת-חוג של $k((x))$)

71. אם $\mathbb{F}\subseteq K$ שדות, אומרים ש-K הרחבה של $\mathbb{F}$

72. אומרים ש-f מתפרק מעל $\mathbb{F}$ אם הוא מכפלה של גורמים ליניאריים

73. R תפ"י. יהי $f(x)=a_nx^n+\dots+a_0\in R[x]$. התכולה של f = המחלק המשותף המקסימלי של כל המקדמים $=c(f)$

74. f נקרא פרימיטיבי אם $c(f)\sim 1$

75. יהי R חוג. מודול מעל R הוא חבורה אבלית $(M,+)$ עם כפל בסקלר $R\times M\longrightarrow M$ המקיים (לכל $x,y\in M$ ולכל $\alpha,\beta\in R$):

א. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

ב. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

ג. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

ד. $1\cdot x=x$

76. יהי M מודול מעל R. תת-מודול הוא תת-קבוצה N שהיא מודול ביחס לפעולות המושרות ($\Longleftrightarrow N\leq M$ ת"ח הסגורה לכפל בסקלר)

77. M,N מודולים מעל R. $\varphi:M\longrightarrow N$ הוא הומומורפיזם של מודולים אם $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$

78. $N\leq M$ מודול ותת-מודול שלו מעל R. M/N הוא חבורת המנה. זה מודול ביחס לפעולה $\alpha(x+N)=\alpha x+N$

79. M,N מודולים. הסכום הישר שלהם הוא: $M\oplus N=\{(x,y)/x\in M,y\in N\}$ עם $\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$

80. $A,B\leq M$. אומרים ש-M הוא סכום ישר פנימי של A ו-B אם $\begin{cases}A+B=M\\A\cap B=\{0\}\end{cases}$ $\Leftarrow$ כל וקטור ב-M ניתן להצגה באופן יחיד כ- $a+b$

81. יהי M מודול מעל R. תהי $S\subseteq M$. אומרים ש-S פורשת את M אם לכל $x\in M$ קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in R$, $v_1,\dots,v_n\in S$ כך ש- $\sum\alpha_iv_i=x$

82. M נוצר סופית אם הוא נפרש ע"י קבוצה סופית

83. $S\subseteq M$ קב' בת"ל (בלתי תלויה) אם $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$ ($v_i\in S$ שונים, $\alpha_i\in R$) $\Leftarrow\forall i:\alpha_i=0$

84. S היא בסיס של M אם היא פורשת ובת"ל.

85. R חוג, $R^n=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}/\alpha_i\in R\}$, זה מודול ע"י $\beta\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\alpha_1\\\vdots\\\beta\alpha_n\end{pmatrix}$

86. "מודול חופשי" הוא מודול שיש לו בסיס

87. הדרגה של מודול M היא העוצמה המינימלית של קבוצה פורשת (סימון: $\mathrm{Rank}\,M$)

88. $A,B\in M_n(R)$. הן דומות ($A\sim B$) אם קיימות $P,Q\in GL_n(R)$ כך ש- $B=PAQ$

89. מטריצה קנונית היא מטריצה אלכסונית $\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}$ כאשר $d_1|d_2|\dots|d_n$

90. מודול שיש לו יוצר יחיד נקרא ציקלי