נכתב על ידי נועם יערי

מבחני התכנסות לטורים כלליים

משפט (מבחן אבל)

אם (a_n) מונוטונית וחסומה, ו-$\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n b_n$ מתכנס ולכן חסום.

הוכחה

טענה: $\sum b_n$ מתכנס, ולכן חסום.

הוכחה: אם S_n הסכומים החלקיים שלו, $S_n \to s$, אז (S_n) סדרה מתכנסת ולכן חסומה.

הסדרה a_n מונוטונית וחסומה, לכן קיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש- $a_n \to a$.

$a_n - a \to 0$ מונוטונית. ממבחן דיריכלה, הטור $\sum b_n (a_n - a)$ מתכנס.

$\sum b_n (a_n - a) = \sum (b_n a_n - a \cdot b_n)$. נתון שהטור $\sum b_n$ מתכנס, ולכן $\sum a b_n = a \sum b_n$ מתכנס.

לכן: $\sum b_n a_n = \sum \left((b_n a_n - a \cdot b_n) + a \cdot b_n \right) = \sum (b_n a_n - a b_n) + \sum a b_n$

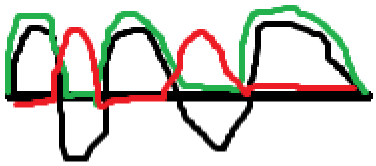
ולכן $\sum b_n a_n$ מתכנס.

■

הגדרה

עבור טור $\sum a_n$, נסמן $\boldsymbol{p_n} := \begin{cases} \boldsymbol{a_n}\,, \boldsymbol{a_n} \geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}\,, \boldsymbol{a_n} \leq \boldsymbol{0} \end{cases}$, $\boldsymbol{q_n} := \begin{cases} \boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{a_n} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{a_n}\,, \boldsymbol{a_n} \leq \boldsymbol{0} \end{cases}$.

המחשה



"p", "q"

תכונות בסיסיות

לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים:

- $0 \leq p_n, q_n \leq |a_n|$.
- $p_n + q_n = |a_n|$.
- $p_n - q_n = a_n$.

למה

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט $\Leftrightarrow \sum p_n, \sum q_n < \infty$. במקרה זה מתקיים: $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$.

הוכחה

$|a_n| = p_n + q_n$ לכל n.

$\boxed{\Rightarrow}$

$\sum p_n, \sum q_n$ מתכנסים ולכן: $\sum |a_n| = \sum (p_n + q_n) = \sum p_n + \sum q_n$ ולכן מתכנס.

$\boxed{\Leftarrow}$

$0 \le p_n, q_n \le |a_n|$.

$\sum |a_n| < \infty$, לכן ממבחן ההשוואה, גם $\sum p_n, \sum q_n < \infty$.

הטענה $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ נובעת מהתכונה $a_n = p_n - q_n$ ומההתכנסות.

מסקנה

אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum p_n = \sum q_n = \infty$

הוכחה

$\sum |a_n| = \infty$ לכן מהלמה אחד הטורים $\sum p_n$ או $\sum q_n$ מתבדר. נניח למשל $\sum p_n = \infty$ (*המקרה הנותר – **תרגיל**).

$\sum a_n$ מתכנס. נניח בשלילה ש- $\sum q_n$ מתכנס, אז כיוון ש - $p_n = a_n + q_n$ גם $\sum p_n$ מתכנס, בסתירה. ■

הערה

הכיוון ההפוך לא בהכרח נכון: שני הטורים החיוביים מתבדרים אך הטור המקורי מתבדר (אינו מתכנס בתנאי)

דוגמה

$$(a_n) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}, -\frac{2}{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, -\frac{2}{2}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, -\frac{2}{3}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, ..$$

$$\sum p_n = \infty$$
$$\sum q_n = \infty$$

למה

אם טור אי שלילי $\sum a_n$ מתכנס, אז לאותו סכום יתכנס הטור גם לאחר שינוי כרצוננו של סדר איבריו. כלומר: לכל תמורה P על $\mathbb{N}$ (=פונקציה חח"ע ועל $P: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$), $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

הוכחה

נסמן את הסכומים החלקיים של $\sum a_{p(n)}$ ב-S_n^p ואת הסכום כולו S^p. לכל n:

$$S^p_{n \to (S^p)} = a_{p(1)} + \cdots + a_{p(n)} \le a_1 + a_2 + \cdots + a_{\max\{p(1),\cdots,p(n)\}} \le S \coloneqq \sum a_n$$

לכן, לכל טור חיובי $\sum a_n$ ולכל תמורה P: $S^p \le S$. בפרט, לטור החיובי $\sum a_{p(n)}$ עם התמורה P^{-1}, נקבל $S^p = \sum a_{p(n)} \ge \sum a_{p^{-1}(p(n))} = \sum a_n = S$.■

משפט (חוק החילוף)

אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז שינוי סדר איבריו לא משנה את סכומו.

הוכחה

מהלמה הקודמת ומהנתון: $\sum a_n = \overbrace{\sum p_n}^{\text{מתכנס}} - \overbrace{\sum q_n}^{\text{מתכנס}}$, לכן: $\sum a_{p(n)} = \sum (p_{p(n)} - q_{p(n)})$.

$\sum |a_n| < \infty$ טור חיובי (פורמאלית: אי שלילי), לכן $\sum |a_{p(n)}| = \sum |a_n|$ מתכנס ובפרט $\sum a_{p(n)}$ מתכנס בהחלט, ולכן:

$$\sum a_{p(n)} = \sum p_{p(n)}{}_{= \sum p_n \text{ טור חיובי לכן}} - \sum q_{q(n)}{}_{= \sum q_n \text{ טור חיובי לכן}} = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$$

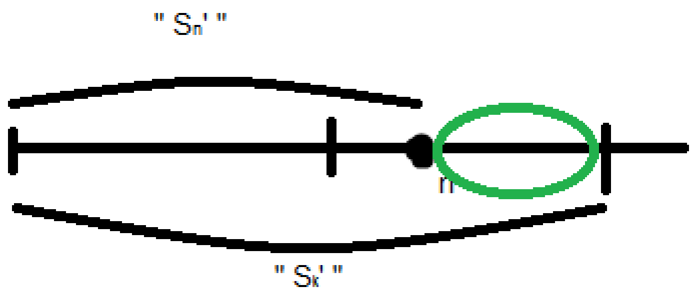
■

למה

יהי $\sum a_n$ טור. נניח שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{m_k} + \cdots + a_{m_{k+1}-1}\right)$ (המתקבל מטורנו ע"י הכנסת סוגריים) מתכנס, והסימן של $a_{m_k}, \cdots, a_{m_{k+1}-1}$ זהה לכל k. אזי הסרת הסוגריים אינה משנה את סכום הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}(a_n) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{m_k} + \cdots + a_{m_{k+1}-1}\right)$.

הוכחה

לכל n, יהי $k = k(n)$ המספר כך ש-$m_k \le n < m_{k+1}$.



נסמן: $S'_k = \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_{m_i} + \cdots + a_{m_{i+1}-1}\right)$

$$|S'_k - S_n| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{m_{k+1}-1}\right| \le \left|a_{m_k} + \cdots + a_{m_{k+1}-1}\right| = |b_k|$$

$\sum b_k$ מתכנס (נתון). לכן, כאשר $n \to \infty$ גם $k \to \infty$ ולכן $b_k \to 0$ ולכן $|S_k' - S_n| \leq |b_k| \to 0$
לכן $S_n \to S'$. (S' הסכום המקובץ).

<u>הערה</u>: לא סיימנו! **תרגיל:** 1. להוכיח את ה'לכן' האחרון. 2. למצוא מה לא מדויק בהוכחה.