פתרון הבוחן בגיאומטריה תשע"ו

19 במאי 2016

1. המטריצה שלנו היא: $A=\begin{pmatrix}9&6&3\\6&5&0\\3&0&5\end{pmatrix}$. נמצא את הע"ע:

$$0=\begin{vmatrix}\lambda-9&-6&-3\\-6&\lambda-5&0\\-3&0&\lambda-5\end{vmatrix}=-3\left(3\left(\lambda-5\right)\right)+\left(\lambda-5\right)\left(\left(\lambda-5\right)\left(\lambda-9\right)-36\right)=$$

$$=\left(\lambda-5\right)\left(\lambda^2-14\lambda+45-36-9\right)=\lambda\left(\lambda-5\right)\left(\lambda-14\right)$$

לכן הע"ע הם $\lambda=0,5,14$.

נמצא וקטורים עצמיים מתאימים. עבור $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix}9&6&3\\6&5&0\\3&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases}9x+6y+3z=0\\6x+5y=0\\3x+5z=0\end{cases}$$

מהמשוואות השנייה והשלישית נקבל: $z=-\frac{3}{5}x, y=-\frac{6}{5}x$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix}5\\-6\\-3\end{pmatrix}$$

נורמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}5\\-6\\-3\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda = 5$:

$$\begin{cases} 9x+6y+3z=5x \\ 6x+5y=5y \\ 3x+5z=5z \end{cases}$$

נקבל ש: $x = 0$, ואם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל: $z = -2y$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

נורמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda = 14$:

$$\begin{cases} 9x+6y+3z=14x \\ 6x+5y=14y \\ 3x+5z=14z \end{cases}$$

מהמשוואות השנייה והשלישית נקבל: $z = \frac{1}{3}x, y = \frac{2}{3}x$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

נורמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

אם כך, המטריצה המלכסנת P והאלכסונית D הן:

$$D = \begin{pmatrix}14&0&0\\0&5&0\\0&0&0\end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}&0&\frac{5}{\sqrt{70}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{6}{\sqrt{70}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{3}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}$$

התבנית שלנו היא:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=2$$

נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=2$$

נשים לב שמתקיים:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{70}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=-\sqrt{70}z'$$

ולכן בקואורדינטות החדשות נקבל:

$$14\left(x'\right)^2+5\left(y'\right)^2-\sqrt{70}z'-2=0$$

נעביר אגף ונקבל:

$$14\left(x'\right)^2+5\left(y'\right)^2=\sqrt{70}\left(z'+\frac{2}{\sqrt{70}}\right)$$

נסמן: $z'+\frac{2}{\sqrt{70}}=z''$, נחלק ב־$\sqrt{70}$ ונקבל:

$$\frac{14\left(x'\right)^2}{\sqrt{70}}+\frac{5\left(y'\right)^2}{\sqrt{70}}=z''$$

וזהו פרבולואיד אליפטי.

חשוב לזכור שיש יותר מצורה קנונית אחת.

2. א. וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t)=\left(-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t\right)$$

ולכן:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt=3a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}dt=$$

לפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$. לפי הזהות $\sin 2t=2\cos t\sin t$ נקבל:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left|\sin 2t\right|dt=$$

נחלק את האינטגרל לפי תחומי החיוביות והשליליות של $\sin 2t$:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin 2tdt+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2tdt+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-\sin 2tdt\right)$$

כל אחד מהאינטגרלים שווה ל-1, ולכן:

$$L=\frac{3a}{2}\cdot 4=6a$$

ב. וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t)=(a-a\cos t,a\sin t)$$

לכן:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-2a^2\cos t+a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}dt$$

לפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$. לפי זהות לזווית כפולה: $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$, ולכן:

$$=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\cdot 2=8a$$

3. א. 1. וקטור הנגזרות של העקומה הוא: $(-A\sin t, A\cos t)$ ולכן:

$$L(\beta_1)=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\begin{pmatrix}-A\sin t & A\cos t\end{pmatrix}\frac{1}{(A\sin t)^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-A\sin t\\ A\cos t\end{pmatrix}}dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{1}{(A\sin t)^2}\cdot\left(A^2\sin^2 t+A^2\cos^2 t\right)}dt=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}}dt=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\sin t}dt$$

את האינטגרל הזה אפשר לחשב בעזרת ההצבה האוניברסלית $x=\tan\frac{t}{2}$ ואפשר ללכת עם ולהרגיש בלי, כך:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\sin t}dt=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}dt=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt=\left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=\frac{\pi}{3}}^{t=\frac{2\pi}{3}}=\ln 3$$

וזהו האורך של β_1.

א.2. הפרמטריזציה זהה לזו שבתת־סעיף 1, ורק הגבולות משתנים, ולכן:

$$L(\beta_2)=\left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=0}^{t=\pi}=\infty$$

א.3. וקטור הנגזרות של העקומה הוא $(0,1)$ ולכן:

$$L(\beta_3)=\int\limits_0^1\sqrt{\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\frac{1}{(t)^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}dt=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1}{t^2}}dt=(\ln t)_{t=0}^{t=1}=\infty$$

ב. נשתמש בנוסחה: $\iint_{\varphi(\Omega)}dS=\iint_\Omega\sqrt{\det G}dxdy$.
מתקיים:

$$\sqrt{\det G}=\sqrt{\begin{vmatrix}\frac{1}{y^2}&0\\0&\frac{1}{y^2}\end{vmatrix}}=\frac{1}{y^2}$$

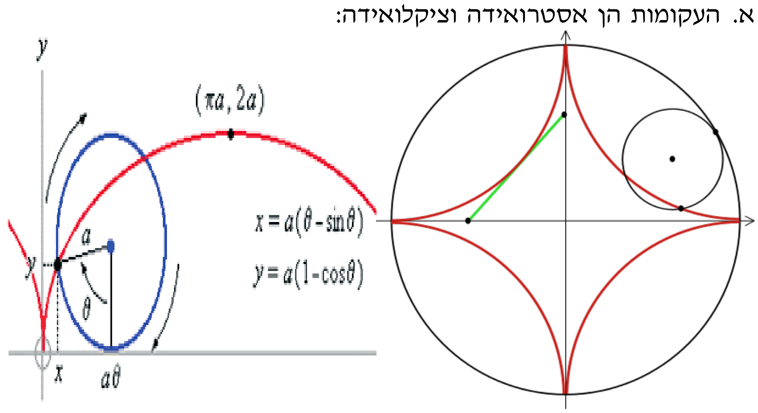
מהו התחום Ω שלנו? $\Omega=\left\{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\sqrt{1-x^2}<y<\infty\right\}$ ולכן:

$$S(X\circ\Omega)=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{1}{y^2}dydx=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{y}\right)_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\infty}dx=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$= (\arcsin x)_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

שאלת בונוס:

א. העקומות הן אסטרואידה וציקלואידה:



ב. אצלנו בעקומה (אם אתה לבן מאן):

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$$

ולכן:

$$(x)^{\frac{2}{3}} + (y)^{\frac{2}{3}} = \left(a\cos^3 t\right)^{\frac{2}{3}} + \left(a\sin^3 t\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t + a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t = a^{\frac{2}{3}}$$

ואפשר אם כן לבחור: $F(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$ כהצגה סתומה.

ג. המטריקה:

$$G = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לשם הנוחות, נגזור את כל המטריצה במכה, ונסמן זאת כך:

$$G_{,1} = \frac{\partial G}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_{,2} = -\frac{2}{y^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בנוסף:

$$G^{-1} = y^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$g^{11}=y^2, g^{12}=g^{21}=0, g^{22}=y^2$$

$$g_{11,1}=g_{12,1}=g_{21,1}=g_{22,1}=0$$

$$g_{11,2}=g_{22,2}=-\frac{2}{y^3}, g_{12,2}=g_{21,2}=0$$

ואם כן:

$$\begin{gathered}
\Gamma^1_{11}=\tfrac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\tfrac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=0\\
\Gamma^1_{12}=\tfrac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\tfrac{1}{2}g^{12}\left(\ldots\right)=-\tfrac{1}{y}\\
\Gamma^1_{21}=-\tfrac{1}{y}\\
\Gamma^1_{22}=0\\
\Gamma^2_{11}=-\tfrac{1}{y}\\
\Gamma^2_{12}=0\\
\Gamma^2_{21}=0\\
\Gamma^2_{22}=-\tfrac{1}{y}
\end{gathered}$$