פתרון תרגיל 9 אינפי 1 מדמ"ח תשע"ז

11 בינואר 2017

1. נשתמש בכלל לופיטל.

(א) זהו גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$, הנגזרת של המכנה שונה מאפס בקרן $(-\infty,0)$, ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)'}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow-\infty}-2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1-x}=-\infty$$

(ב) זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, הנגזרת של המכנה שונה מאפס בסביבת הנקודה $x=\frac{\pi}{2}$, ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos 3x)'}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'}=\lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-1}=-3$$

(ג) זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, הנגזרת של המכנה $e^x-1\neq 0$ בסביבה מנוקבת של הנקודה $x=0$, ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x\longrightarrow0}\frac{x^2}{e^x-x-1}=\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x-x-1\right)'}=\lim_{x\longrightarrow0}\frac{2x}{e^x-1}$$

שוב, קיבלנו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$. הנגזרת של המכנה שונה מאפס, ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x\longrightarrow0}\frac{2x}{e^x-1}=\lim_{x\longrightarrow0}\frac{(2x)'}{\left(e^x-1\right)'}=\lim_{x\longrightarrow0}\frac{2}{e^x}=2$$

(ד) זהו גבול מהצורה 1^{∞}. לפי חוקי הלוגריתם:

$$(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=e^{\tan\frac{\pi}{2}x\ln(2-x)}$$

מכיוון שהפונקציה e^x היא רציפה, אפשר לחשב את הגבול של המעריך ולבסוף להעלות את e בחזקתו.

אם כן, הגבול הוא:

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\tan\frac{\pi}{2}x\ln(2-x)=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi}{2}x}$$

זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, הנגזרת של המכנה $0 \neq -\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}$ בסביבת הנקודה $x=1$,

ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(\ln(2-x))'}{\left(\cot\frac{\pi}{2}x\right)'}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}x}{2-x}=\frac{2}{\pi}$$

ולכן הגבול המקורי הוא $e^{\frac{\pi}{2}}$.

(ה) זהו גבול מהצורה ∞^0. שוב, לפי חוקי הלוגריתם:

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+x^2\right)}=e^{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln x}}$$

שוב, נחשב את הגבול במעריך. זהו גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$, הנגזרת של המכנה שונה מאפס, ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2}{\frac{1}{x^2}+1}=2$$

ולכן הגבול המקורי הוא e^2.

(ו) זהו גבול מהצורה $\infty-\infty$. לפי חוקי הלוגריתם:

$$x-\ln\left(1+e^{2x}\right)=\ln e^x-\ln\left(1+e^{2x}\right)=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)$$

מכיוון שהפונקציה $\ln x$ היא רציפה, אנחנו יכולים לחשב את הגבול של הביטוי בתוך ה־$\ln$ ולבסוף להפעיל עליו $\ln$.

אם כן, זהו גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$. הנגזרת של המכנה שונה מאפס ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(e^x)'}{(1+e^{2x})'}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{2e^x}=0$$

אנו לא יכולים להציב 0 בתוך ה־$\ln$, אך אנו יודעים שמתקיים: $\ln t \longrightarrow -\infty$ כאשר $t \longrightarrow 0$, ולכן הגבול שלנו הוא $-\infty$.

(ז) זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, הנגזרת של המכנה $-\pi \sin \pi x \neq 0$ בסביבה מנוקבת של $x = 1$, ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sin \pi x \cdot \ln x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(\sin \pi x \cdot \ln x)'}{(1 + \cos \pi x)'} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sin \pi x \cdot \frac{1}{x} + \pi \cos \pi x \cdot \ln x}{-\pi \sin \pi x} =$$

נפרק לשני גבולות:

$$= \lim_{x \longrightarrow 1} -\frac{\cos \pi x \cdot \ln x}{\sin \pi x} + \lim_{x \longrightarrow 1} -\frac{1}{\pi x}$$

הגבול הימני הוא $-\frac{1}{\pi}$. הגבול השמאלי הוא גבול מהצורה $\frac{0}{0}$. אפשר לכתוב אותו כך:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} -\frac{\ln x}{\tan \pi x}$$

הנגזרת של המכנה $\frac{\pi}{\cos^2 \pi x}$ שונה מאפס בסביבת הנקודה $x = 1$, ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} -\frac{\ln x}{\tan \pi x} = \lim_{x \longrightarrow 1} -\frac{(\ln x)'}{(\tan \pi x)'} = \lim_{x \longrightarrow 1} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{\cos^2 \pi x}} = -\frac{1}{\pi}$$

ולכן בסה"כ הגבול שלנו הוא:

$$-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

(ח) זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, הנגזרת של המכנה $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$ בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = 0$, ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sqrt{1 - x^2} - 1} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(x \tan x)'}{\left(\sqrt{1 - x^2} - 1\right)'} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} =$$

נפרק לשני גבולות:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan x}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} + \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{x}{\cos^2 x}}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{\sin x \sqrt{1 - x^2}}{x \cos x} + \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos^2 x}$$

הגבול הימני הוא -1. כדי לחשב את הגבול שמאלי, נשים לב שמתקיים:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}-\frac{\sin x\sqrt{1-x^2}}{x\cos x}=\lim_{x\longrightarrow 0}-\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x}=-1\cdot 1=-1$$

ולכן בסה"כ הגבול שלנו הוא:

$$-1-1=-2$$

2. יהי $\varepsilon>0$. בכל סעיף נחפש עבורו $\delta>0$ מתאים.

(א) נחפש $\delta>0$ כך שאם $|x-7|<\delta$, יתקיים:

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-8}+36\right|<\varepsilon$$

אם כן:

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-8}+36\right|=\left|\frac{x^2-x-6+36x-288}{x-8}\right|=\left|\frac{x^2+35x-294}{x-8}\right|=\left|\frac{(x-7)(x+42)}{x-8}\right|$$

אנו רוצים את $|x-7|$. איך נחסום את $\left|\frac{x+42}{x-8}\right|$?

נקבע $\delta=\frac{1}{2}$. אם $|x-7|<\delta$, אז $6\frac{1}{2}<x<7\frac{1}{2}$, ואז:

$$\left|\frac{x+42}{x-8}\right|<\frac{49\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=99$$

ולכן:

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-8}+36\right|<99\,|x-7|<\varepsilon$$

כלומר: $|x-7|<\frac{\varepsilon}{99}$, ולכן δ המתאים הוא:

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{99}\right\}$$

(ב) נחפש $\delta>0$ כך שאם $0<x<\delta$, יתקיים:

$$\frac{\sqrt{x}}{x+1}<\varepsilon$$

מכיוון ש־$x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x}}{x+1} < \sqrt{x} < \sqrt{\delta}$$

ולכן נבחר $\delta = \varepsilon^2$ כדי לקבל את הדרוש.

(ג) נחפש $\delta > 0$ כך שאם $|x-1| < \delta$, יתקיים:

$$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right|$$

כעת, מכיוון ש: $\sqrt{x}+1 > 1$, נקבל:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right| < \frac{1}{2}\left|1-\sqrt{x}\right|\left(\sqrt{x}+1\right) < \frac{1}{2}\delta$$

ולכן נבחר $\delta = 2\varepsilon$ כדי לקבל את הדרוש.

(ד) נחפש $\delta > 0$ כך שאם $|x-1| < \delta$, יתקיים:

$$\left|\frac{3x+1}{x} - 4\right| = \left|\frac{1-x}{x}\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right|$$

נקבע $\delta = \frac{1}{2}$. לכן $\frac{1}{2} < x < 1\frac{1}{2}$, ואז:

$$\left|\frac{x-1}{x}\right| < 2\left|x-1\right| < \varepsilon$$

כלומר $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן δ המתאים הוא:

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \min\left\{1, \varepsilon\right\}$$

3. נתרגם את הטענות.

(א) פונקציה רציפה בנקודה פירושו שהגבול בנקודה שווה לערך בנקודה. לכן, נתרגם: "לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $|x-c| < \delta$, מתקיים: $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$."

(ב) זו רציפות מימין בנקודה c, ולכן נתרגם: "לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x > c$ המקיים $x - \delta < c$, מתקיים: $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$."

4. הטענה אומרת שהפונקציה אינה רציפה משמאל ב־$x = c$. בשפת האינפיניטסמילים: "קיים $x < c$ המקיים $x \approx c$ עבורו $f(x)$ לא שקולה אינפיניטסימלית ל־$f(c)$."