דף תרגילים 3

1. קבעו האם המטריצה: חיובית לחלוטין / שלילית לחלוטין / לא מוחלטת (indefinite) / אחרת

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

פתרון: צריך לבדוק את הסימן של הדטרמיננטות של המינורים הראשיים, לחלופין אפשר לבדוק את הסימן של הערכים העצמיים – כולם חיוביים -> מטריצה חיובית לחלוטין.

א. לא מוחלטת (יש ע"ע שלילי וע"ע חיובי).
ב. שלילית לחלוטין (כל הע"ע שליליים)
ג. שלילית לחלוטין.

2. קבעו כיצד נראה הגרף של התבניות הריבועיות הבאות: פרבולויד אליפטי/פרבולויד היפרבולי/צילינדר פרבולי (שרטט בצורה כללית במערכת צירים):

א. $Q(X) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2$

ב. $Q(X) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$

ג. $Q(X) = -5x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$

ד. $Q(X) = -4x_1^2 + 12x_1x_2 - 9x_2^2$

פתרון: יש לכתוב את המשוואה $z - Q(X) = 0$, להביא אותה לצורה סטנדרטית ע"י לכסון המטריצה המתאימה לתבנית Q ולנתח את הצורה לפי הכללים הידועים לכם מהשיעור.

למשל בא' המשוואה היא $2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2 - z = 0$, המטריצה היא $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, אחד הערכים העצמיים הוא 0, השני חיובי ולכן זהו צילינדר פרבולי.

3. מצאו משוואה ריבועית מהצורה $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ המתארת:

א. אליפסה שמרכזה ב $(5,-3)$ ואורכי ציריה 2 ו- 4

$$4x^2 + y^2 - 40x + 6y + 93 = 0$$

ב. היפרבולה שהאסימפטוטות שלה הן $x = 6$ ו- $y = 2$ (האסימפטוטות של ההיפרבולה $xy = 1$ הן הצירים)

$$xy - 6y - 2x + 11 = 0$$

ג. פרבולה שקודקודה ב $(1,1)$ והיא סימטרית ביחס לישר $y = x$

$$0.5x^2 - xy + 0.5y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \sqrt{2} = 0$$

4. נתונה המשוואה הריבועית $x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 2y - 5 = 0$

א. הראו שאוסף הנקודות המקיימות את המשוואה יוצר צורה של היפרבולה במישור $[xy]$.

ב. מצאו את מרכז ההיפרבולה. **תזכורת:** מרכז ההיפרבולה הוא נקודת החיתוך של האסימפטוטות.

ג. מהו המרחק בין קודקודי ההיפרבולה? (העבירו לצורה קנונית ומצאו מרחק בין נקודות חיתוך עם הצירים)

7. נתונה המשוואה הריבועית $x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 2y - 5 = 0$

I. הראה שאוסף הנקודות המקיימות את המשוואה יוצר צורה של היפרבולה במישור

התבנית המייצגת היא $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ויש לה דטרמיננטה שלילית. אם כך זו היפרבולה או מקרה קצה מתאים. בשביל לראות שזו הימרבולה צריך לראות ש- $r \neq 0$. נראה זאת בסעיפים הבאים.

II. מצא את מרכז ההיפרבולה

נמצא את המרכז לפי הנוסחא.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \frac{-1}{2\cdot(-3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

III. מהו המרחק בין קודקודי ההיפרבולה? (העבר לצורה קנונית ומצא מרחק בין נקודות חיתוך עם הצירים)

נציב $x = x' + x_0 = x' + 2, y = y' + y_0 = y' + 3$ במשוואה ונקבל צורה קנונית.

$x'^2 - 4x'y' + y'^2 = -6$ (מה שמסיים את הוכחת I) ונכפיל ב- -1 כדי שיהיה לנו r חיובי $(r = 6)$

$4x'y' - x'^2 - y'^2 = 6$.

המטריצה המייצגת היא עכשיו $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ עם פולינום אופייני

$\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda-1)(\lambda+3)$. הע"ע החיובי הוא 1. המרחק של כל קודקוד מהראשית יהיה אם כן $\sqrt{\frac{r}{1}} = \sqrt{6}$ ובגלל שהם בכיוונים הפוכים מהראשית המרחק בין שני הקודקודים יהיה פי שניים מזה $2\sqrt{6}$.

5. סכומי איינשטיין:

נתונה מטריצה A מסדר 2×2, ידועה הנוסחה הכללית עבור הפולינום האופייני של מטריצה מסוג זה, $p(x) = x^2 + b_1x + b_2$, כאשר המקדמים b_i מוגדרים בעזרת העקבות של המטריצות A, A^2:

$$b_0 = 1$$
$$b_1 = -T_1 \qquad , \ T_i = Tr(A^i)$$
$$b_2 = \frac{1}{2}\left(T_1^2 - T_2\right)$$

בטאו את משפט **קיילי המילטון** בעזרת נוסחה זו, בסימוני איינשטיין.

$$b_1 = -T_1 = -a^i{}_i$$
$$C = A^2$$
$$c^i{}_j = a^i{}_k a^k{}_j$$
$$T_2 = c^i{}_i = a^i{}_k a^k{}_i$$
$$b_2 = \frac{1}{2}\left(\left(-a^i{}_i\right)^2 - a^i{}_k a^k{}_i\right)$$

$$p\left(x\right) = 0$$
$$a^i{}_k a^k{}_j - -a^m{}_m a^i{}_j + \frac{1}{2}\left(\left(-a^m{}_m\right)^2 - a^m{}_k a^k{}_m\right) = 0$$

6. נתונה הפונקציה $y=x^3$

א. מצאו פרמטרזציה של הגרף של הפונקציה. ושרטט את העקומה במערכת הצירים

ב. הראו שהעקומה רגולרית.

ג. האם $\delta(u)=\left(u^2,u^6\right)$ פרמטרזציה רגולרית של הגרף?

ד. חשבו את הווקטור המשיק והווקטור הנורמל בכל נקודה על העקומה. **הנורמל** הוא הוקטור הניצב למשיק, המתקבל מסיבוב של $\pi/2$ כנגד השעון של המשיק.

ה. מצאו את עקמומיות העקומה (היעזרו בנוסחת Bateman)

ו. מהי העקמומיות המינימאלית של העקומה, ועל איזה נקודה היא מתקבלת?

עקומות ב ־או:

1. נתונה הפונקציה $y=x^3$:

א. מצא פרמטרזציה רגולרית של הגרף של הפונקציה. ושרטט את העקומה במערכת הצירים.

$\gamma(t)=(t,t^3)$ היא פרמטריזציה של הגרף שכן $x=t$ ו- $y=t^3=x^3$. היא רגולרית כי $\gamma'(t)=(1,3t^2)\neq(0,0)$.

ב. האם $\delta(u)=(u^2,u^6)$ פרמטרזציה רגולרית של הגרף?

היא לא רגולרית כי $\delta'(u)=(2u,6u^5)$ ולכן $\delta'(0)=(0,0)$.

ג. מצא נוסחאות לוקטור המשיק T והווקטור הנורמל N בכל נקודה על העקומה.

הווקטור המשיק הוא $T(t)=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{9t^4+1}}(1,3t^2)$. בשביל למצוא את הנורמל נסובב נגד כיוון השעון ב-90 מעלות ונקבל $N(t)=\frac{1}{\sqrt{9t^4+1}}(-3t^2,1)$.

ד. מצא את עקמומיות העקומה בעזרת הפרמטריזציה.

$\gamma''(t)=(0,6t)$, $\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3t^2 & 6t \end{pmatrix}=6t$, ולכן

$$k(t)=\frac{\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{6t}{\sqrt{9t^4+1}^3}$$

ה. מצא את עקמומיות העקומה בעזרת נוסחת **Bateman**. תזכורת לנוסחאת **Bateman**:

$$|k(x,y)|=\left|\frac{F''_{xx}F'^2_y+F''_{yy}F'^2_x-2F''_{xy}F'_xF'_y}{\sqrt{\left(F'^2_x+F'^2_y\right)^3}}\right|$$

נסמן $F(x,y)=y-x^3$ ואז העקומה שלנו היא $F(x,y)=0$. נחשב:

$F'_x=-3x^2, F'_y=1, F''_{xx}=-6x, F''_{xy}=F''_{yy}=0$ ולכן:

$$|k(x,y)|=\left|\frac{-6x\cdot 1^2+0\cdot(-3x^2)^2-2\cdot 0\cdot(-3x^2)\cdot 1}{\sqrt{\left((-3x^2)^{2\,2}+1^2\right)^3}}\right|$$

$$=\left|\frac{-6x}{\sqrt{9x^4+1}^3}\right|=\frac{6|x|}{\sqrt{9x^4+1}^3}$$

ועבור $(x,y)=\gamma(t)=(t,t^3)$ אכן $|k(t)|=|k(x,y)|=\frac{6|t|}{\sqrt{9t^4+1}^3}$.

ו. מהי העקמומיות המינימאלית (בערך מוחלט) של העקומה, ועל איזה נקודה היא מתקבלת?

לפי הנוסחא ב- $|k(0)|=0$ ולכל $t\neq 0$: $|k(t)|>0$ ולכן המינימום מתקבל ב- $\gamma(0)=(0,0)$.

7. נתונה המשוואה $x^2+y^2=4$

א. חשבו את העקמומיות של העקומה המוגדרת ע"י המשוואה בעזרת נוסחת Bateman.

$F(x,y)=x^2+y^2-4$. **מציבים בנוסחה ומקבלים** $1/2$.

ב. מצאו פרמטרזציה של העקומה

. $\gamma(t)=\left(2\cos(t/2),2\sin(t/2)\right)$

ג. חשבו את מהירות העקומה לפי הפרמטרזציה שמצאתם בסעיף ב'. במידה והמהירות שונה מ-1, מצאו פרמטרזציית אורך קשת לעקומה.

$\|\gamma'\|=1$, העקומה במהירות יחידה.

ד. חשבו את העקמומיות של העקומה לפי ההגדרה $|\gamma''|$ = k .

ה. $\gamma''=\left(-\dfrac{\cos(t/2)}{2},-\dfrac{\sin(t/2)}{2}\right),k=1/2$