

3.3 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח את התכונות הבאות של הפולינום האופייני $f_A(x)$:

א. $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} : f_A(\lambda) = 0\}$.

ב. $f_A(0) = |A|$ בפרט, A הפיכה $\Leftrightarrow f_A(0) \neq 0$.

[רמז: אפשר להציב את הסקלר ורק אחר כך לחשב את הדטרמיננטה]

3.4 תרגיל. תהא $A = \alpha I \in \mathbb{F}^{n \times n}$. מצא את הפולינום האופייני של A .

3.9 תרגיל. א. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות דומות. הוכח: $f_A(x) = f_B(x)$ (באזימ: למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני).

ב. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, כך שאחת מהן לפחות הפיכה. הוכח: $f_{AB}(x) = f_{BA}(x)$. [רמז: (ic)]

3.11 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח שלכל ערך עצמי λ של A , הריבוי הגאומטרי של λ קטן או שווה

לריבוי האלגברי שלו.

הזרקה: נוכיח עבור העתקה $T: V \rightarrow V$, כאשר V מרחב ממימד n . (מדוע זה מספיק?)

א. יהא v_1, \dots, v_k בסיס עבור V_λ . כרגיל, נשלים אותו לבסיס $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ עבור V .

ב. הראו ש $(x-\lambda)^k$ מחלק את הפולינום האופייני של $T|_{V_\lambda}$.

3.15 תרגיל. זוכרים את דני? עכשיו הוא חושב שיש לו הוכחה פשוטה למשפט קיילי-המילטון: תהא

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. לפי ההגדרה, $f_A(x) = |A - xI|$, לכן $f_A(A) = |A - AI| = |A - A| = |O| = 0$. מ.ש.ל. אבל דני בחור

פיקח: הוא יודע ש $f_A(A)$ צריכה להיות מטריצה, והוא קיבל סקלר! מה לא נכון בהוכחה של דני? [רמז:

כיצד נראות המטריצה xI ? האם אפשר להציב A במקום x במטריצה xI ?

3.18 תרגיל! מופע הקסמים של vandermonde & companion.

א. יהיו $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ ותהא $A = \text{companion}(a_0, \dots, a_{n-1})$ הוכח שהפולינום

$a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ מאפס את A . [רמז: תרגיל מסעיף 7 בפרק ו']

ב. מצא מטריצה המאפסת את הפולינום $5x^5 + 3x^3 - x^2 + 7 \in \mathbb{R}[x]$.

ג. לכל אות $(m, n, \dots, g, \alpha) \in \mathbb{C}$, נסמן ב- x את הערך הגימטרי שלה $(\alpha = 1, \alpha = 2, \dots, \alpha = 10, \dots, \alpha = 20, \dots)$.

מצא מטריצה A המאפסת את הפולינום:

$$x^{10} + \alpha x^9 + \beta x^8 + \gamma x^7 + \alpha x^6 + \delta x^4 + \epsilon x^3 + \zeta x^2 + \eta x + \theta$$

ד. מצא מטריצה ממשית הדומה למטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$. [רמז: יש 3 ערכים עצמיים שונים. מצא

מטריצה ממשית עם ערכים עצמיים אלו]

ה. יהיו $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ ותהא $A = \text{companion}(a_0, \dots, a_{n-1})$. מהם הוקטורים העצמיים של A ?

ו. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ השורשים של הפולינום $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{C}[x]$. הוכח: אם

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שונים זה מזה, אזי מטריצת ונדרמונדה

$$\text{vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

היא הפיכה (מאם?), והמטריצה

$$\text{vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1} \text{companion}(a_0, \dots, a_{n-1}) \text{vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

היא אלכסונית (מהם אברי האלכסון?).