הרצאה VIII- אינפי 1

דוגמא 1: האם מתקיים x_n מתכנסת אוי"א $\forall p\in N:\ \lim_{n\to\infty} x_{n+p}-x_n=0$?

פתרון: לא. ע"פ המשפט שהוכחנו לגבי סדרת קושי, סדרה מתכנסת אוי"א $\forall\varepsilon>0\exists\bar{n}\forall n,m\geq\bar{n}:\ |x_n-x_m|<\varepsilon$, וזה לא מסתדר עם ההגדרה הנ"ל.

דוגמא 2: ע"פ משפט קנטור, הוכחנו כי הטבעיים והרציונאליים בעלי אותה עוצמה, (קיימת התאמה חד חד ערכית ועל) ולכן אפשר לסמן את הרציונאליים ע"י $Q=\{r_n:n\in N\}$. קבוצה של הגבולות החלקיים של הרציונאליים היא $\mathbb{R}$. ניתן לסמן כך: $\mathbb{R}=\{\text{גבולות חלקיים של}\ \{r_n\}_{n=1}^{\infty}\}$. אנחנו לקראת סוף פרק זה, כעת נגדיר חזקות ולוגריתמיים כדי שישמשו לנו ככלים בפתרון בעיות בהמשך הדרך. נחזור להגדרות אלה לקראת הנושא פונקציות.

הגדרות: $a^{\frac{m}{n}}:=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.$a>0$. כעת נגדיר $a^x:=inf\{a^r:r\in Q,x<r\}$ $a>1,x\in\mathbb{R}:$. ועבור $a^x:=\frac{1}{(a^{-1})^x}$,$0<a<1$.

הגדרה ללוגריתם: $x>0,lnx:=inf\{t\in Q,x<e^t\}$ ובאופן כללי $\log_b x:=\frac{lnx}{lnb}$, $b>0,x>0$

תרגילים: הוכח כי מתקיים (1 $a^xa^y=a^{x+y}$ (2 $lnxy=lnx+lny$.

<u>פרק שלוש: טורים מספריים</u> (טור=series)

הגדרה של טור וסכומו: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $s_1=a_1,s_2=a_1+a_2,\dots,s_k=\sum_{n=1}^k a_n$. טור: $=:\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

סימבול לטור הוא: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.סכום חלקי: $s_k=\sum_{n=1}^k a_n$ של הטור $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

הגדרה: אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם קיים $\lim_{n\to\infty}s_n:=S\in R$. אם הטור לא מתכנס נגיד שהוא מתבדר, ז"א שלא קיים לו גבול.

דוגמא 1: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, אנו יודעים שהסכום יהיה אפס אם n חיובי, ויהיה -1 אם n שלילי, לכן אין גבול. ז"א שהטור מתבדר.

דוגמא 2: $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$. נחלק למקרים, $q=-1, q=1, |q|<1, |q|>1$. עבור כל אחד מהמקרים ובהתאמה נקבל כי עבור $|q|<1$ ע"פ סדרה הנדסית מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{1-q}$, עבור כל אחד מהאחרים לא קיים גבול. פעמיים שואף לאינסוף, ופעם אחת חסר גבול בכללי. למסקנה, $(|q|<1)$, $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$.

דוגמא 3: הצגה עשרונית: $x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{10^k}$, וזה מתכנס, כי ניתן להוכיח שזוהי סדרת קושי.

<u>משפט</u>: יהיו שני טורים, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, אם הטורים מתכנסים, אזי $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha a_n+\beta b_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, כאשר α,β ממשיים, ז"א ליניארי.

הוכחה: משפט זה טריויאלי ונובע מחוקי אריתמטיקה של סדרות.

מבחן קושי: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ אוי"א $s_k=\sum_{n=1}^k a_n$ מתכנסת אוי"א $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. כלומר: $\forall\varepsilon>0\exists\bar{n}\forall n\geq\bar{n}\forall p\in N$ $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$. לפי הגדרת הסכומים, נובע המשפט הבא:

משפט: מבחן קושי: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אוי"א $\forall\varepsilon>0\exists\bar{n}\forall n\geq\bar{n}\forall p\in N:\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$.

דוגמא: $x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{10^k}$, ולכן $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\alpha_k}{10^k}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{|\alpha_k|}{10^k}\leq 9\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{10^k}=9\frac{1}{10^{n+1}}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{10^m}<\frac{9}{10^{n+1}}\frac{10}{9}=\frac{1}{10^n}\to 0$ ומכאן שקיים גבול.

משפט: (תנאי הכרחי של התכנסות) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הוכחה: $a_n = s_n - s_{n-1}$, ועי"פ אריתמטיקה של גבולות נקבל את הדרוש.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}+1}{2n+3}$, איבר כללי כאן שואף לחצי, ולכן הגבול של הטור מתבדר.

המשפט ההפוך לא נכון. ז"א יש מקרה בו איבר כללי שואף לאפס אך הגבול לא מתכנס. ניקח לדוגמא את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ שהוכחנו בשיעור קודם שגבולו הוא ∞.

טורים עם איברים חיוביים:

הגדרה: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ a_n \geq 0, \forall n \in N:$.

משפט: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ a_n \geq 0,$ מתכנס אוי"א $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (סדרה של סכומים חלקיים) חסומה מלעיל. ז"א $\exists c \geq 0 \ \forall n \in N: \ s_n \leq C$.

הוכחה: $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ סכום חלקי מקיים $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, מתקיים כי s_n עולה מונוטונית, ולכן s_n אוי"א היא חסומה מלעיל, והוכחנו את המשפט. משל.

מכאן נובע: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ a_n \geq 0,$, מתקיים כי s_n עולה מונוטונית, לכן קיים גבול ממשי. אם $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

אם מתקיים $\lim_{n\to\infty} s_n < \infty$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ולכן הטור מתכנס.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

מבחני השוואה:

משפט: יהיו שני טורים, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, נניח $\exists n_0 \forall n \geq n_0: \ a_n \leq b_n$.

1) אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

הוכחה: ברור כי 2 מסקנה לוגית מ1, כעת נתחיל בהוכחה. נגדיר: $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$. ע"פ הנתון של המשפט מתקיים כי $a_{n_0+1} + \cdots + a_n \leq b_{n_0+1} + \cdots + b_n$ ועי"פ הגדרה מתקיים $A_n - A_{n_0} \leq B_n - B_{n_0}$ ומכאן מתקיים $A_n \leq A_{n_0} + B_n - B_{n_0}$, ואם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסת, אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת כי A_{n_0}, B_{n_0} מספרים בעלמא.

דוגמא 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, ידוע כי $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, ועי"פ המשפט הקודם נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר. כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ טור הרמוני ומתבדר.

דוגמא 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ כאשר $\varepsilon > 1$ מתכנס. נוכיח זאת בשיעור הבא.

מבחני השוואה אסימפטוטיים:

1) הגדרה: (סימבולים של לנדאו-*Edmond Landau*) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כאשר $a_n, b_n \geq 0$. $a_n = O(b_n), n \to 0$, אם קיים M חיובי כך ש $0 \leq a_n \leq Mb_n (n \geq n_0)$.

דוגמא: $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{10}{n^2}$, ואז $\frac{a_n}{b_n} = \frac{10}{n} \to 0$, ז"א שקיים n_0 כך שm=1.

2) $a_n = O^*(b_n), n \to 0$, אם קיימים m,M חיוביים כך ש $mb_n \le a_n \le Mb_n (n \ge n_0)$. כי בהנחה ש$b_n$ שונה מאפס, מתקיים כי $0 \le \frac{a_n}{b_n} \le M$.

תכונות: א) $a_n = O^*(b_n)$ אזי $a_n = O(b_n)$.

ב) $a_n = O^*(b_n)$ אזי $b_n = O^*(a_n)$

3) נניח $b_n \neq 0$. נגדיר: $a_n = o(b_n)$ אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

דוגמא: $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$ כי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. דוגמא נוספת: $a_n = \frac{1}{2n}, b_n = \frac{1}{n}$ ומתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$ לכן $a_n \neq o(b_n)$.

4) $a_n \sim b_n$ אוי"א $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

דוגמא: $a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}+2}, b_n = \frac{n}{n^2+n+1}, c_n = \frac{1}{n}$. מתקיים: $a_n \sim b_n$ כי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. וגם $a_n \sim c_n$ כי אם נחשב את הגבול נקבל $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+\sqrt{n}+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n}} = 1$, ואז קיבלנו כי $a_n \sim b_n \sim c_n$.

מסקנה: $\frac{1}{n^3+n^2+n+1} \sim \frac{1}{n^3}$.