

קומבינטוריקה

מספר האפשרויות לבחור – ארבעה סוגי בעיות

הסדר לא חשוב	הסדר חשוב	בחירת k מתוך n
$\binom{n+k-1}{k}$	n^k	עם החזרה
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$	בלי החזרה

1. בחירה עם החזרות כשיש חשיבות לסדר

תהי X קבוצה בגודל n .

כל בחירה עם החזרות וחשיבות לסדר היא ווקטור באורך k .
סופרים את כל הבחירות האפשריות.

מספר האפשרויות

$$|X^k| = n^k$$

דוגמה

בכד 10 כדורים ממוספרים.

מוציאים כדור – קובע מי זוכה בכובע.

מחזירים לכד. מוציאים כדור נוסף – קובע מי זוכה בחולצה.

מחזירים לכד. מוציאים כדור נוסף – קובע מי זוכה בתקליט.

”עקרון המכפלה”

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

מספר התוצאות האפשריות בזוג ניסויים שווה למכפלת מספרי האפשרויות בכל ניסוי
בנפרד. חל בתנאי שאין קשר בין הניסויים.

תזכורת מתורת הקבוצות (מתמטיקה בדידה)

1. ווקטור ב”אורך” k

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

$$(a, b, c) = (a, (b, c))$$

⋮

$$(a_1, \dots, a_k) = (a_1, (a_2, \dots, a_k))$$

2. ווקטור ב"אורד" k עם ערכים מ X

פונקציה $f: \{1, \dots, k\} \rightarrow X$

לסיכום, הוצאת הכדורים $x_1, \dots, x_k \equiv$ ווקטור (x_1, \dots, x_k) כשלכל $1 \leq i \leq k$:

$$f(i) = x_i \equiv x_i \in X \text{ המוגדרת ע"י } \{1, \dots, k\} \rightarrow X$$

2. בחירה בלי החזרה כשיש חשיבות לסדר.

דוגמה

בכד 10 כדורים ממוספרים.

הניסוי כמו בדוגמה 1, פרט לכך שאסור לתת לאותו אדם יותר מפרס אחד.

קבוצת הבחירות האפשריות $\{(x_1, \dots, x_k) \mid \forall i \neq j : x_i \neq x_j\} \equiv$ פונקציה חד חד

ערכית $\{f : \{1, \dots, k\} \rightarrow X\}$.

מספר האפשרויות

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. בחירה בלי החזרה כשאין חשיבות לסדר.

דוגמה

בוחרים וועד כיתה (הומוגני) בגודל k מתוך כיתה של n תלמידים.

$X =$ קבוצת התלמידים, $|X| = n$.

$A =$ הוועד, $A \subseteq X$, $|A| = k$.

קבוצת הבחירות $\{A \subseteq X \mid |A| = k\}$.

תזכורת

מספר הדרכים לסדר n עצמים $= n! =$ עוצמת קבוצת הפונקציות החד חד ערכיות ועל

מקבוצה בגודל n לעצמה.

$$n! = n \cdot (n-1)!, n \geq 1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1 = |\{\emptyset\}|$$

מודדים את הגודל של $\{A \subseteq X \mid |A| = k\}$.

כדי לספור תת קבוצות בגודל k נתבונן בכל ה- $n!$ דרכים לסדר את X . נחליט ש- A היא

קבוצת k הערכים הראשונים.

מספר האפשרויות

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

"עקרון המנה"

נתונה פונקציה על $C \rightarrow D$ כך שלכל $x \in D$, $|f^{-1}(x)| = m$. אז

$$|D| = \frac{|C|}{m}$$

שימוש כדי לחשב את 3): $\{(x_1, \dots, x_k) \mid \forall i \neq j : x_i \neq x_j\} \rightarrow P_k(x)$

$$|P_k(x)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. בחירה עם החזרה כשאין חשיבות לסדר.

דוגמה

בחידון n משתתפים. החידון נמשך k סיבובים.

בכל סיבוב אחד המשתתפים זוכה בשקל אחד (רק התוצאה הסופית נחשבת).

בחירת הכדורים במקרה זה שקולה לקביעת ערכים a_1, \dots, a_n תחת האילוצים $0 \leq a_i$

ו- $\sum a_i = k$, כאשר $a_i =$ מספר הפעמים שיצא כדור i .

נבנה התאמה בין $Y = \{(a_1, \dots, a_n) \mid \forall i : 0 \leq a_i \wedge \sum a_i = k\}$ לבין

$Z = \{\text{"הווקטורים באורך } n+k-1 \text{ של } k \text{ כדורים ו- } n-1 \text{ מחיצות"}\}$

למשל, התוצאה 3,3,4,7,3 מקודדת לווקטור: $(0, 0, 3, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

מספר האפשרויות

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

דוגמה

הסדר לא חשוב	הסדר חשוב	בחירת 2 מתוך 4
$\begin{pmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ & 2,2 & 2,3 & 2,4 \\ & & 3,3 & 3,4 \\ & & & 4,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 \end{pmatrix}$	עם החזרה
$\begin{pmatrix} & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ & & 2,3 & 2,4 \\ & & & 3,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 2,1 & & 2,3 & 2,4 \\ 3,1 & 3,2 & & 3,4 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & \end{pmatrix}$	בלי החזרה