

## תרגיל 8 אנליזה הרמונית תשע"ט

17 בדצמבר 2018

להגשה בשבוע במתחיל ב30.12, כ"ב טבת.

1. תהי  $f$  פונקציה רציפה למקוטעין בקטע  $[-\pi, \pi]$ , ויהיו  $a_n, b_n$  מקדמי פורייה של  $f$ . נניח שקיים  $k \in \mathbb{N}$  עבורו  $a_n, b_n \leq \frac{1}{n^{k+1}}$ . הוכיחו שהפונקציה  $f$  גזירה  $k$  פעמים.
2. בתרגיל הבא נוכיח את שוויון פרסבל המוכלל: תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות למקוטעין בקטע  $[-\pi, \pi]$ , ויהיו  $a_0, a_n, b_n$  מקדמי פורייה של  $f$ ,  $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$  מקדמי פורייה של  $g$ . אזי:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n})$$

נעשה זאת בשלבים.

(א) לפי פרסבל, רשמו למה שווים ארבעת האינטגרלים הבאים:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f \pm g|^2 dx, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f \pm ig|^2 dx$$

(ב) הוכיחו שבמרחב מכפלה פנימית  $V$ , לכל  $u, v \in V$  מתקיימת הזהות:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left( \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i \|u + iv\|^2 - i \|u - iv\|^2 \right)$$

(ג) רשמו את הזהות עבור  $f, g \in E[-\pi, \pi]$  (עם המכפלה הפנימית המתאימה).

(ד) הסיקו את שוויון פרסבל המוכלל.

3. תהי  $f$  פונקציה רציפה למקוטעין בקטע  $[-\pi, \pi]$ . נניח שמקדמי פורייה של  $f$  הם:  $a_0 = a_n = 0, b_n = 2^{-n}$ . נסמן ב- $S(x)$  את סכום טור פורייה בנקודה  $x$ .

- (א) הוכיחו או הפריכו:  $f$  רציפה.
- (ב) מצאו את  $S$  במפורש; שחקו בין ההצגה המעריכית להצגה הקוטבית.
- (ג) מצאו את מקדמי פורייה של  $S'$ .