מבחן מועד ב' – חדו"א 2 לאודיסאה –19/09/22

מרצה: ד"ר ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נביט בפונקציה

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

א. חשבו את ערך הנגזרת הבאה $f^{(61)}(0)$.

בטור טיילור המקדם של x^{61} חייב להיות מקדם טיילור כלומר שווה ל$\frac{f^{(61)}(0)}{61!}$

אבל בטור שלנו, המקדם של x^{61} הוא

$$\frac{1}{60!}$$

ומכאן, לפי עיקרון השיוויון (הפרוגרס הגיע לחדוא)

$$\frac{f^{(61)}(0)}{61!}=\frac{1}{60!}$$

ולכן

$$f^{(61)}(0)=61$$

ב. הביעו את $f(1),f(2)$ באמצעות פונקציות אלמנטריות.

נתחיל מהטור

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

לכן

$$xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

ולכן

$$f(x)=xe^x-x$$

ולכן

$$f(1)=e-1$$

$$f(2)=2e^2-2$$

2. נביט בפונקציות

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

א. חשבו את $f(1)$.

נציב $x=1$ ונחשב את הטור המספרי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

שתי דרכים אפשריות

1. טור טלסקופי

2. טור חזקות

נפתור בשתי הדרכים בזריזות בתנאי שתהיו בשקט (בואו, זה אודיסאה, זה לא יקרה)

$$S_n=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}=\frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$1=A(n+2)+B(n+1)$$

נציב $n=-1,-2$

$$A=1$$

$$B=-1$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

בשימוש בנוסחא הנפלאה שפיתחנו בעזרת שברים חלקיים נפתור את התרגיל להלן:

$$S_n=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\to\frac{1}{2}$$

ולכן $f(1)=\frac{1}{2}$

כעת נפתור עם טור חזקות. עלייה לצורה ירידה

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$$

ורוצים לחשב את $h(1)=f(1)$

נתחיל מהטור ההנדסי

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

נעשה אינטגרל $\int_0^x \square$ לשני הצדדים

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

כעת נרצה לעשות עוד אינטגרל

$$-\int \ln(1-x)\,dx=\begin{Bmatrix}t=1-x\\ dt=-dx\end{Bmatrix}=\int \ln(t)\,dt=tln(t)-t=(1-x)\ln(1-x)-(1-x)$$

ואנחנו צריכים

$$\int_0^x -\ln(1-t)\,dt=[(1-x)\ln(1-x)-(1-x)]_0^x=(1-x)\ln(1-x)-(1-x)+1$$

לכן

$$(1-x)\ln(1-x)+x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

שימו לב שהטור מימין הוא לא הטור שחשבנו שנגיע אליו בדיוק, אבל הוא מספיק טוב בהצבה של 1

בצד שמאל אי אפשר להציב 1 אבל בצד ימין אפשר כי הטור מתכנס, במצב זה אפשר לחשב את הגבול משמאל והשיוויון יתקיים (משפט אבל)

ולכן (צריך לחשב את הגבול)

$$0+1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

שימו לב, הטור הזה מתחיל מאפס ולא מאחד כמו שביקשו בשאלה!

$$1=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ואכן הטור שווה חצי!

ב. הוכיחו כי לכל $x \in (-1,1)$ מתקיים כי $f(x) = g(x)$.

נשים לב כי

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

זה הטור ההנדסי שהציבו בו $-x$ זה מתכנס בתחום $(-1,1)$ ולכן

$$g(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

כעת

נחשב את הטור השני שוב באמצעות הטלסקופיות

$$\frac{1}{(n+x)(n+x+1)} = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}$$

לפי החישוב בסעיף הראשון ע"י הצבת $n+x$ בפירוק

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)} + \frac{1}{(2+x)(3+x)} + \cdots + \frac{1}{(n+x)(n+x+1)} =$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \cdots + \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1} \to \frac{1}{1+x}$$

משל.

3. תהי $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית המקיימת לכל $x,y \in \mathbb{R}$ כי

$$f_x(x,y) = -f_y(x,y)$$

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(t,t)$ קבועה לכל $t \in \mathbb{R}$.

נסמן $h(t) = f(t,t)$ ונראה כי נגזרתה שווה אפס תמיד, ולכן היא קבועה תמיד

$$h'(t) = f_x(t,t) \cdot 1 + f_y(t,t) \cdot 1 = -f_y(t,t) + f_y(t,t) = 0$$

ב. הוכיחו כי לכל $x,y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x-y,0) = f(x,y)$.

(רמז: הביטו ב$f(t,t+y-x)$).

נביט, בעקבות הרמז בפונקציה

$$g(t) = f(t,t+y-x)$$

נציב,

$$g(x-y)=f(x-y,0)$$

עכשיו אני ממש חושב שאנחנו בכיוון, נציב גם

$$g(x)=f(x,y)$$

אז רק נותר להוכיח כי g קבועה תמיד! נגזורה

$$g'(t)=f_x(t,t+y-x)\cdot 1+f_y(t,t+y-x)\cdot 1=$$

$$=-f_y(t,t+y-x)+f_y(t,t+y-x)=0$$

מ.ש.ל

4. נביט בפונקציה $f(x,y)=x^2+xy+y^2$

א. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x,y)$ (מקס' מקומי, מינ' מקומי, אוכף).

נק' קריטיות הן נק' בהן הגרדיאנט מתאפס

$$f_x=2x+y$$

$$f_y=x+2y$$

$$f_x=0$$
$$f_y=0$$

$$\begin{cases}2x+y=0\\x+2y=0\end{cases}$$

$$x=-2y$$

$$-4y+y=0$$

$$y=0$$

$$x=0$$

הנק' החשודה היחידה היא $(0,0)$

כעת נחשב את הנגזרות השניות

$$f_{xx}=2$$
$$f_{xy}=1$$
$$f_{yy}=2$$

$$\Delta(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\cdot 2-1=3>0$$

לכן זה קיצון מקומי! שימו לב, לא הצבנו את הנק החשודה כי Δ יצאה קבועה.

לא זאת בלבד, אלא

$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$

לכן מדובר במינימום מקומי.

ב. מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של $f(x,y)$ בתחום $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$.

צריך למצוא נקודות חשודות בפנים התחום – מצאנו $(0,0)$ חשודה והיא בפנים התחום.

צריך למצוא נקודות חשודות על שפת התחום

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

שפת התחום נתנת כקו הגובה

$$g(x,y) = 0$$

נק' חשודות הן נקודות על השפה בהן $\nabla g(x,y) = (0,0)$ או נקודות שמתקבלות ממשוואות כופלי לגראנז'

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$$

הנק' היחידה שבה הגרדיאנט הזה מתאפס אינה בשפת התחום, ממילא היא כבר חשודה אבל אני אומר את זה שתדעו שאם היא לא הייתה חשודה, לא הייתי חושד בה.

$$f_x = \lambda g_x$$
$$f_y = \lambda g_y$$
$$g = 0$$

קיבלנו את מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda 2x \\ x + 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

נבודד את x מהמשוואה השנייה

$$x = 2y(\lambda - 1)$$

$$y = 2x(\lambda - 1)$$

$$y = 4y(\lambda - 1)^2$$

$$y(1 - 4(\lambda - 1)^2) = 0$$

לכן $y = 0$ או $1 - 4(\lambda - 1)^2 = 0$

אם $y = 0$ אז מהמשוואה השנייה $x = 0$ ולכן נק' זו לא על השפה (לא מקיימת את המשוואה השלישית).

לכן

$$4(\lambda - 1)^2 = 1$$

$$\lambda - 1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

אם $\lambda = \frac{1}{2}$ אז

$$\begin{cases} 2x + y = x \\ x + 2y = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x = -y$$

$$(-y)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

וקיבלנו שתי נקודות

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

כעת נציב $\lambda = \frac{3}{2}$ ונקבל

$$\begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x = y$$

ולכן באופן דומה נוספות זוג נקודות

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

סה"כ 5 נק' חשודות, נציב את כולן

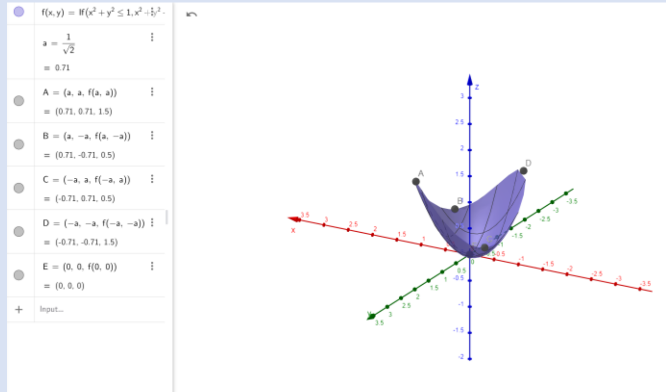
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ או } \frac{3}{2}$$

סה"כ הערך המינימלי הוא 0 והערך המקסימלי הוא $\frac{3}{2}$

להלן אילוסטרציה:



5. יהי בית שתחום הרצפה שלו הוא $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ וגובה התקרה שלו הוא $f(x,y)=x^2+y^2$.
מצאו את שטח הפנים הכולל של הבית (רצפה, קירות ותקרה).

נתחיל ברצפה, שהיא קלה במיוחד, כיוון שמדובר במעגל היחידה מרדיוס אחד שטחו π.

נעבור לקירות, המסילה C מסביב לשטח הבית היא כמובן מעגל היחידה, וניתנת בפרמטריזציה

$$\vec{r}(t)=(\cos(t),\sin(t)),\qquad t\in[0,2\pi]$$

שטח הקירות הוא בעצם האינטגרל הקווי מסוג ראשון במישור על המסילה C של פונקציית הגובה $f(x,y)$

$$\int_C f(x,y)dr=\int_0^{2\pi} f(\cos(t),\sin(t))\cdot\sqrt{(-\sin(t))^2+\cos^2(t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\left(\underbrace{\cos^2(t)+\sin^2(t)}_{1}\right)\sqrt{1}dt=2\pi$$

עד כה שטח הפנים הוא 3π

כעת נעבור לשטח הפנים של התקרה, ולצורך זה נחשב אינטגרל משטחי מסוג ראשון על משטח התקרה של הפונקציה הקבועה 1.

פרמטריזצית משטח התקרה נתונה על ידי

$$\vec{s}(x,y)=\big(x,y,f(x,y)\big),\ \ (x,y)\in D$$

זו הצורה הכללית לפרמטריזציה של גרף פונקציה בתחום נתון.

נסמן את המשטח בM

$$M=\big\{\big(x,y,f(x,y)\big)|(x,y)\in D\big\}$$

האינטגרל המשטחי הוא

$$\iint_M 1dS=\iint_D 1\cdot|\vec{s}_x\times\vec{s}_y|dxdy$$

$$\vec{s}_x \times \vec{s}_y = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix} = \left(-f_x, -f_y, 1\right)$$

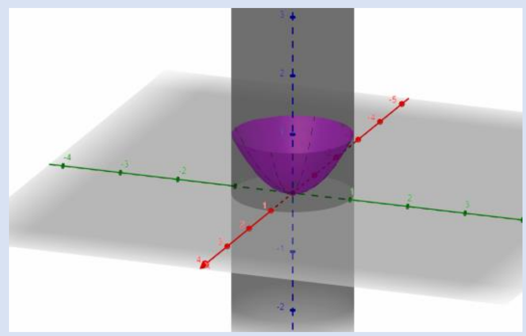
$$\left|\vec{s}_x \times \vec{s}_y\right| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \underset{\text{ובמקרה שלנו}}{=} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}$$

$$\iint_M 1dS = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dxdy \underset{\text{קואורדינטות קוטביות}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot rdr\right)d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot rdr =$$

$$= \begin{Bmatrix} t = 1 + 4r^2 \\ dt = 8rdr \\ \frac{1}{8}dt = rdr \end{Bmatrix} = \frac{2\pi}{8}\int_1^5 \sqrt{t}dt = \frac{\pi}{4}\int_1^5 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

סה"כ שטח הפנים הכולל הוא

$$3\pi + \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$



נראה כעת דרך אחרת לחישוב שטח הפנים של התקרה עם פרמטריזציה אחרת.

$$\vec{s}(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r^2)$$

$$(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

בפרמטריזציה זו הפרמטרים מגיעים ממלבן, ולא נצטרך לבצע שינוי קואורדינטות.

$$\iint_M 1dS = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 1 \cdot |\vec{s}_r \times \vec{s}_\theta| d\theta\right) dr$$

$$\vec{s}_r \times \vec{s}_\theta = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 2r \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} = (-2r^2\cos(\theta), -2r^2\sin(\theta), r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta)) =$$

$$= (-2r^2\cos(\theta), -2r^2\sin(\theta), r)$$

לכן

$$|\vec{s}_r \times \vec{s}_\theta| = \sqrt{4r^4\cos^2(\theta) + 4r^4\sin^2(\theta) + r^2} = \sqrt{4r^4 + r^2} = \sqrt{1 + 4r^2}r$$

וחזרנו בדיוק לאותו האינטגרל!

6. נביט במשטחים

$$M = \left\{(x,y,z) | z = \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

$$T = \{(x,y,z) | x^2+y^2 \leq 1, z=0\}$$

ובשדה הוקטורי

$$\vec{F} = x^3\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath} + z^3\hat{k}$$

הקדמה:

לפי משפט גאוס המעטפת של חצי הספירה V היא $M \cup T$ ולכן

$$\iint_{M\cup T} \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \iiint_V div(\vec{F})dxdydz$$

בגאוס הנורמל צריך להיות כלפי חוץ התחום ולמזלנו (או בזכות מחברי השאלה) הנורמל בשני הסעיפים הוא בדיוק בכיוון הרצוי כלומר סה"כ

$$\iiint_V div(\vec{F})dxdydz = \underbrace{\iint_M \vec{F}\cdot\hat{n}dS}_{\text{סעיף ב}} + \underbrace{\iint_T \vec{F}\cdot\hat{n}dS}_{\text{סעיף א}}$$

לאחר שנחשב את הסכום, נוכל לפתור רק את אחד הסעיפים (כנראה את סעיף א' שהרי המשטח שם קל בהרבה)

$$div(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 3x^2+3y^2+3z^2$$

צריך לחשב את

$$3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

כיוון ש V חצי ספירה, נעבור באופן טבעי לקואורדינטות כדוריות

$$\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

(כי מדובר בחצי העליון של הספירה)

$$\varphi \in [0,2\pi]$$

$$r \in [0,1]$$

$$3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin(\theta)dr\,d\varphi\,d\theta$$

ראשית נחשב את האינטגרל הפנימי לפי r

$$\int_0^1 r^4 dr = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

שנית האינטגרל לפי φ הוא

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

נותרנו עם

$$\frac{6}{5}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\, d\theta = \frac{6\pi}{5}[-\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi}{5}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)\right] = \frac{6\pi}{5}$$

א. חשבו את עוצמת הזרימה של השדה דרך המשטח T, בכיוון הנורמל בעל רכיב ציר z שלילי.

נחשב פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(r,t) = (r\cos(t), r\sin(t), 0)$$

$$r \in [0,1]$$

$$t \in [0,2\pi]$$

$$\iint_T \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \pm\int_0^1\int_0^{2\pi}\vec{F}\left(\vec{s}(r,t)\right)\cdot(\vec{s}_r\times\vec{s}_t)dt\,dr$$

כאשר הסימן יקבע לפי הדרישה כי הנורמל יהיה כלפי מטה.

נתחיל לחשב דברים

$$\vec{F}\left(\vec{s}(r,t)\right) = (r^3\cos^3(t), r^3\sin^3(t), 0)$$

כיוון שהמשטח כולו מוכל במישור xy הנורמל יהיה מהצורה $(0,0,*)$ וכבר עכשיו רואים שהתוצאה היא אפס, אבל בכל זאת נמשיך.

$$\vec{s}_r\times\vec{s}_t = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -r\sin(t) & r\cos(t) & 0\end{pmatrix} = (0,0,r)$$

ולכן עוצמת הזרימה היא

$$\iint_T \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \int_0^1\int_0^{2\pi}(r^3\cos^3(t), r^3\sin^3(t), 0)\cdot(0,0,-r)dt\,dr = 0$$

ב. חשבו את עוצמת הזרימה של השדה דרך המשטח M, בכיוון הנורמל בעל רכיב ציר z חיובי.

לפי ההקדמה, אינטגרל זה שווה ל $\frac{6\pi}{5}$ כי האינטגרל בסעיף א' יצא 0 וסכום הוא $\frac{6\pi}{5}$.

בואו נשתגע ונחשב את האינטגרל הזה ישירות.

פרמטריזציה למשטח:

$$\vec{s}(\theta,\varphi) = (1\cdot\sin(\theta)\cos(\varphi)\,, 1\cdot\sin(\theta)\sin(\varphi)\,, 1\cdot\cos(\theta))$$

$$\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\varphi \in [0,2\pi]$$

$$\iint_M \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\vec{F}\big(\vec{s}(\theta,\varphi)\big)\cdot\left(\vec{s}_\theta\times\vec{s}_\varphi\right)d\varphi\, d\theta$$

ראשית נחשב את

$$\vec{F}\big(\vec{s}(\theta,\varphi)\big) = (\sin^3(\theta)\cos^3(\varphi)\,, \sin^3(\theta)\sin^3(\varphi)\,, \cos^3(\theta))$$

כעת למכפלה הוקטורית

$$\vec{s}_\theta\times\vec{s}_\varphi = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\,, \sin^2(\theta)\sin(\varphi)\,, \cos(\theta)\cos(\varphi)\sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)\sin(\theta)\sin(\varphi)) =$$

$$= (\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\,, \sin^2(\theta)\sin(\varphi)\,, \cos(\theta)\sin(\theta))$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\vec{F}\big(\vec{s}(\theta,\varphi)\big)\cdot\left(\vec{s}_\theta\times\vec{s}_\varphi\right)d\varphi\, d\theta \overset{WOLFRAM}{=} \frac{6\pi}{5}$$