עקרון ההכללה וההוצאה מן הכלל

(Inclusion-Exclusion Principle)

מכונה גם: עקרון ההכלה וההדחה, או: ההדחה וההכלה. הוא מכליל את הנוסחה הידועה לגודל האיחוד של שתי קבוצות סופיות:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|.$$

למשל, עבור 3 קבוצות:

$$|A\cup B\cup C| = (|A|+|B|+|C|) - (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) + |A\cap B\cap C|.$$

תהיינה $A_1,\dots,A_n$ קבוצות סופיות, ונסמן:

$$A_I := \bigcap_{i\in I} A_i \qquad (\emptyset\neq I\subseteq N:=\{1,\dots,n\})$$

<u>טענה</u>: (עקרון ההכללה וההוצאה מן הכלל)

$$(*)\quad \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq N} (-1)^{|I|-1}|A_I|$$

<u>הוכחה</u>:

יהי $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ כלשהו, ונסמן: $J=J(x):=\{1\le i\le n \mid x\in A_i\}$

ברור ש- $J\neq\emptyset$. האיבר x "נספר" פעם אחת באגף שמאל של (*); <u>עלינו</u> להראות שהוא "נספר" בדיוק פעם אחת (אחרי כל הצמצומים) גם באגף ימין של (*). מהגדרת J ברור שמתקיים

$$x\in A_I \iff I\subseteq J \qquad (\forall \emptyset\neq I\subseteq N)$$

לכן x נספר באגף ימין בדיוק $\sum_{\emptyset\neq I\subseteq J}(-1)^{|I|-1}$ פעמים.

לכל $1\le k\le n$, מספר תת־הקבוצות $\emptyset\neq I\subseteq J$ שגודלן $|I|=k$ הוא $\binom{|J|}{k}$. לכן

$$\sum_{\emptyset\neq I\subseteq J}(-1)^{|I|-1} = \sum_{k=1}^{|J|}\binom{|J|}{k}(-1)^{k-1} = -\sum_{k=1}^{|J|}\binom{|J|}{k}(-1)^{k} = 1-(1-1)^{|J|} = 1. \quad \square$$

נוסח שקול של העקרון מתקבל אם נסמן $A_\emptyset := U$ כאשר $U\supseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ כלשהי, ואז:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}(U\setminus A_i)\right| = \left|U\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| = \sum_{I\subseteq N}(-1)^{|I|}|A_I|.$$