1. הוכיחו או הפריכו:

א) אם $R(A,B;C,D) = R(A,B;C,D')$ אז $D=D'$.

ד) אם $R(A,B;C,D)=1$ אז $C=D$.

לא נכון כש- $A=B$

ב) אם $R(A,B;C,D) = R(A,B';C',D)$ אז $B=B', C=C'$.

ג) אם $R(A,B;C,D) = R(A,B';C',D)$ אז $AB' / AC' = AB / AC$.

לא נכון. למשל:
$A=1,B=3,C=2$
$,D=4,B' = 2,$
$C' = 4/3$

ה) אם $R(A,B;C,D) = R(B,A;C,D)$ אז $A=B$ או $C=D$. לא נכון. למשל כשהנקודות הרמוניות

2. א) נסתכל על הספרה ב- R^3, ז"א על קבוצת הנקודות:

$$S^2 = \{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$$

נגדיר יחס שקילות על S^2:

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \Leftrightarrow (-x,-y,-z) = (x',y',z')$$

הוכיחו שיש מיפוי חח"ע ועל בין הנקודות ב- RP^2 לבין הנקודות במרחב המנה $S^2/\sim$.
(למעשה מיפוי זה הוא הומיאומורפיזם).

נקודה $(x:y:z)$ ב- RP^2 היא ישר L ב- R^3 העובר דרך הראשית.
נגדיר את המיפוי $f:RP^2 \to S^2/\sim$ על ידי $f(L) = L \cap S^2$.
יש שתי נקודות בחיתוך זה, אבל שתיהן באותה מחלקה ולכן המיפוי מוגדר היטב.
צ"ל חח"ע ועל.

<u>חח"ע</u>: אם $f(L) = (a,b,c) = (e,d,f) = f(M)$ הן שתי מחלקות שקילות שוות ב- $S^2/\sim$ אז $(a,b,c)=\pm(e,d,f)$ ולכן הישרים M,L (העוברים דרך הראשית ודרך אחת מהנקודות) מתלכדים.

<u>על</u>: למחלקה $\pm(a,b,c)$ (כנקודה ב- $S^2/\sim$) נתאים את הנקודה $(a:b:c)$ ב- RP^2.

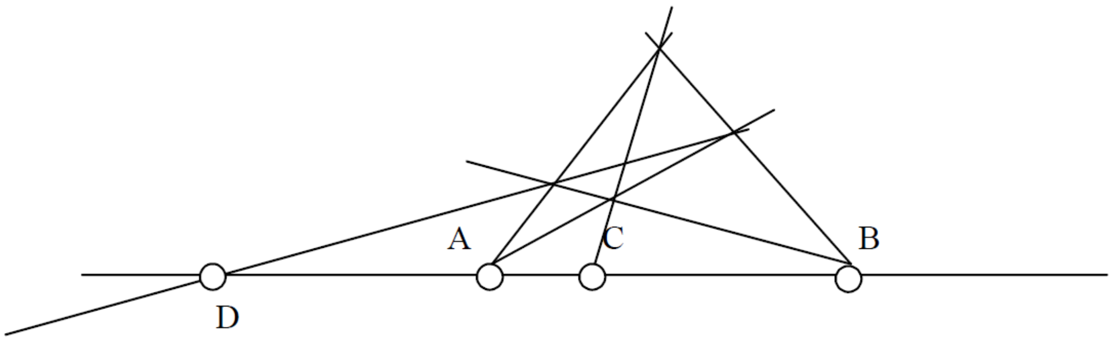
(שימו לב: אם מתעקשים לעשות התרגיל בקואורדינטות, אז f מוגדר כך:

$$f((x:y:z)) = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$).

ב) הכלילו את סעיף א) עבור המישור הפרויקטיבי ה- n מימדי: RP^n (ז"א – נסחו טענה מתאימה והוכיחו אותה).

מכיוון ש- נקודה ב- RP^n היא ישר L ב- R^{n+1} העובר דרך הראשית, ניתן להגדיר את המיפוי $RP^n \to S^n/\sim$ באותו אופן.

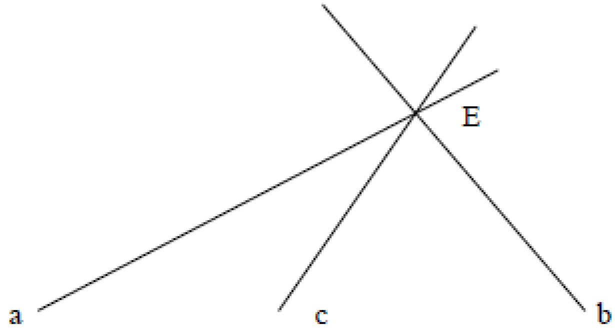
3. המטרה בשאלה זו הייתה לבנות באופן מפורש, על ידי ציור, את נקודה D, על פי הבניה שעשינו בכיתה. למשל ב-א):



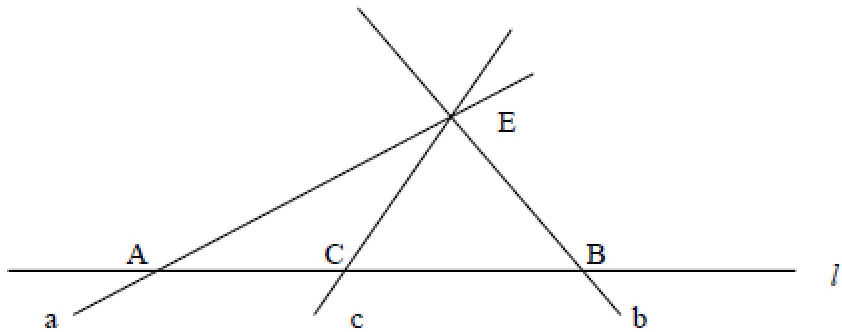
וכנ"ל לסעיף ב), שם D מתקבלת כנקודה בין A ל-B , כשהיא יותר קרובה ל-A.

4. תהיינה A,B,C שלוש נקודות על ישר l ונקודה P שאינה על l. בשיעור ראיתם את הבניה הגיאומטרית של נקודה D על l כך שהרביעייה A,B,C,D היא הרמונית.
תארו (וציירו) בניה דואלית של הנ"ל: התחילו עם שלישיית ישרים a,b,c קונקורנטיים בנקודה L ובנו ישר d שעובר דרך L כך שרביעייה a,b,c,d הרמונית(כלומר היחס בין נק' החיתוך של ישרים אלו עם כל ישר הרמוני). הוכיחו שאכן הרביעייה הרמונית.

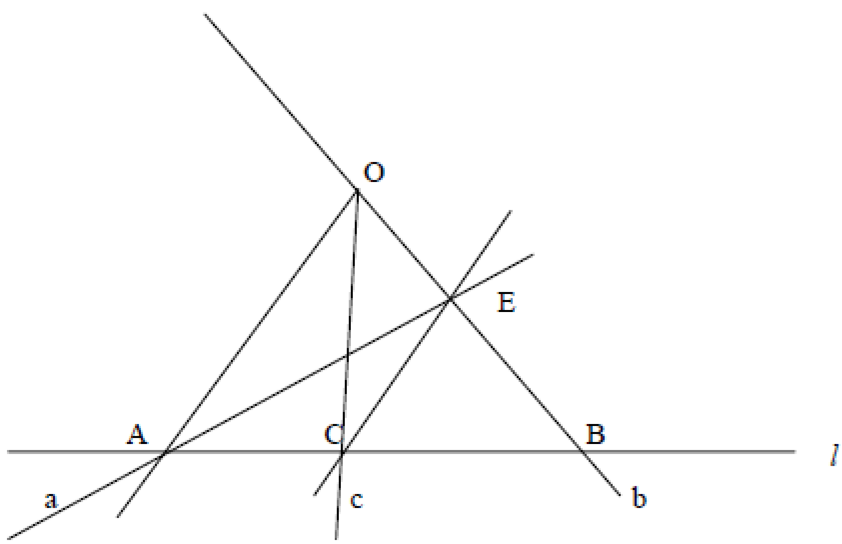
פתרון:
נתבונן ב 3 ישרים קונקורנטיים לנקודה E: a,b,c



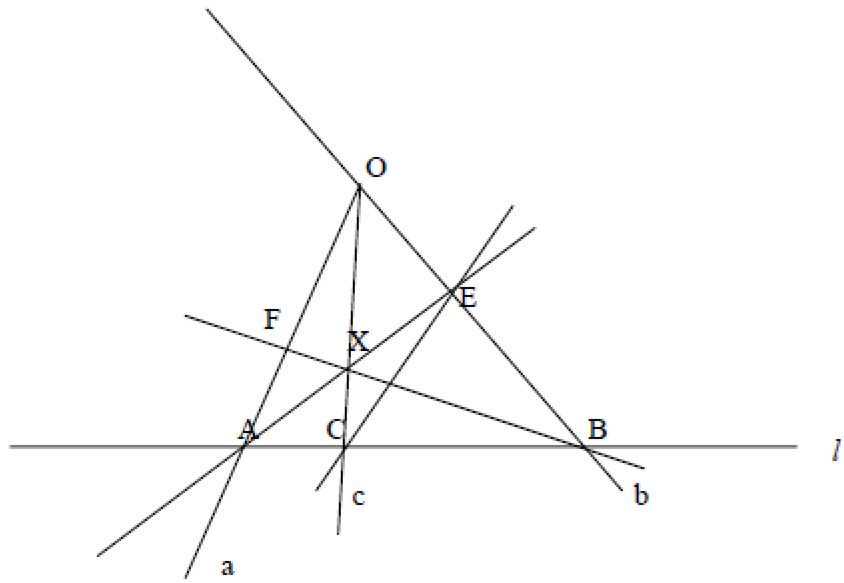
נעביר ישר שאיננו קונקורנטי להם- l וניתן שם לחיתוכים בהתאמה:



נבחר נקודה O על המשכה של 'b ונעביר CO,AO :



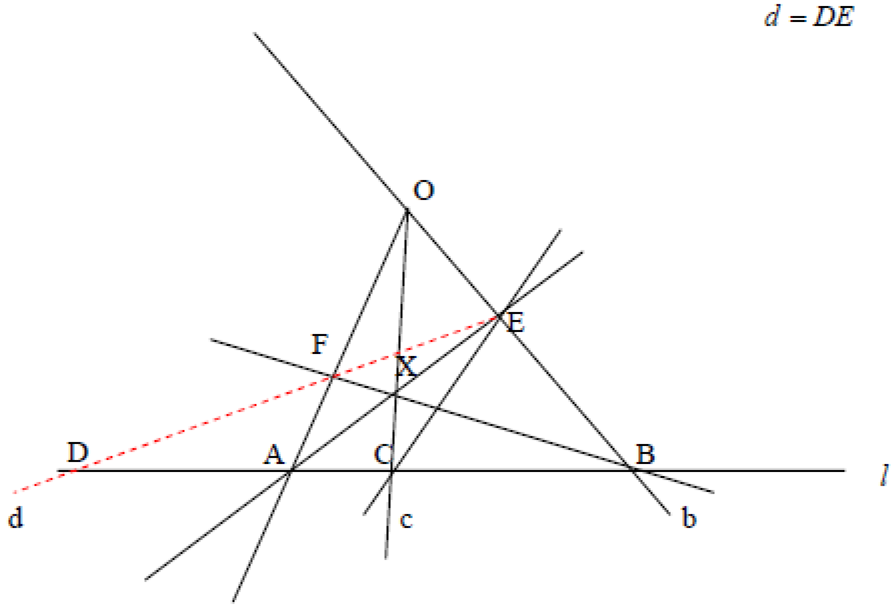
נגדיר $CO \cap AE = X$, נעביר BX ונגדיר $BX \cap AO = F$



לבסוף נגדיר :

$D = EF \cap l,$

$d = DE$



הנקודות A,B,C,D הרמוניות כפי שהוכח בכיתה ולכן הישרים a,b,c,d הרמוניים.

5. (30 נקודות) יהי $R(A,B,C,D_k)$ היחס הכפול של נקודות על ישר מרוכב פרויקטיבי, כאשר $A=\infty$, $B=0$, $C=1$. נניח $D_k=e^{\frac{ik\pi}{6}}$, כאשר $k=1,\ldots,6$.

א. מצא כל הערכים האפשריים השונים של היחס הכפול תחת כל התמורות של רביעיה (A,B,C,D_k) כאשר $k=1$.

ב. מצא כל הערכים האפשריים השונים של היחס הכפול תחת כל התמורות של הרביעיה כאשר $k=2$.

ג. תהי $f(k)$ מספר טוטאלי של ערכים שונים זה מזה של היחס הכפול תחת כל התמורות של הרביעיה (A,B,C,D_k). חשב $f(k)$ כפונקציה מפורשת של האינדקס $k=1,\ldots,6$.

<u>פתרון</u>

ראשית, $R(\infty,0,1,D_k)=D_k=e^{\frac{ik\pi}{6}}$.

א. הערכים האפשריים של היחס הכפול עבור $r=e^{\frac{i\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$1-r = \frac{2-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$1/r = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$1-1/r = \frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$1/(1-r) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4-2\sqrt{3}}i$$

$$1/(1-1/r) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4-2\sqrt{3}}i$$

ב. הפעם עבור $r=e^{\frac{i\pi}{3}}$ מתקבלים רק שני ערכים אפשריים כי:

$$r=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$1/\mathrm{r}=1-r=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ג. ראינו לעיל כי f(1)=6, f(2)=2.
עבור k=3 מתקבל r=1 לכן f(3)=3 כי יש 3 ערכים אפשריים: $0,1,\infty$
עבור k=4,5 מתקבלים 6 ערכים כלומר f(4)=f(5)=6.
לסיום עבור k=6 מקבלים r=-1 לכן f(6)=3 כי התמורות נותנות $-1,\frac{1}{2},2$