תזכורת

1. יהי $T: V \to W$ אופרטור לינארי. אזי לכל $v \in V \wedge w \in W$ מתקיים:
$< T(v), w > = < v, T^*(w) >$.
2. יהי $T: V \to V$ אופרטור נורמלי. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע״ע של T. יהי $v \in V$ ו״ע המתאים ל $-\lambda$.
אזי, $T^*(v) = \bar{\lambda} \cdot v$.

מסקנה

אם $T: V \to V$ אופרטור נורמלי, λ, μ ערכים עצמיים שונים של T, v וקטור עצמי של T המתאים לערך העצמי λ, w וקטור עצמי של T המתאים לערך העצמי μ, אז: $v \perp w$.

הוכחה

$$\lambda \cdot < v, w > = < \lambda \cdot v, w >$$

$$\lambda \cdot < v, w > = < T(v), w >$$

$$\lambda \cdot < v, w > \overset{\text{תכונה של } T^*}{=} < v, T^*(w) >$$

$$\lambda \cdot < v, w > \overset{\text{משפט קודם}}{=} < v, \bar{\mu} \cdot w >$$

$$\lambda \cdot < v, w > = \bar{\bar{\mu}} \cdot < v, w >$$

$$\boldsymbol{\lambda \cdot < v, w > = \mu \cdot < v, w >}$$

$\lambda \neq \mu$, לכן $< v, w > = 0$, אזי: $v \perp w$.

■

מסקנה

תכונה זו מתקיימת בפרט לאופרטור אוניטרי ולאופרטור צמוד לעצמו.

מסקנה

אם $T: V \to V$ אופרטור <u>צמוד לעצמו</u>, אזי כל הערכים העצמיים של T ממשיים.

הוכחה

יהי λ ערך עצמי של T, ויהי v וקטור עצמי של T המתאים לערך העצמי λ.

$$\lambda \cdot < v, v > = < \lambda \cdot v, v >$$

$$\lambda \cdot < v, v > = < T(v), v >$$

$$\lambda \cdot < v, v > = < v, T^*(v) >$$

$$\lambda \cdot < v, v > = < v, T(v) >$$

$$\lambda \cdot < v, v > = < v, \lambda \cdot v >$$

$$\boldsymbol{\lambda \cdot < v, v > = \bar{\lambda} \cdot < v, v >}$$

$v \neq 0$ (שכן v ווקטור עצמי), לכן: $< v, v > \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (תכונות של נורמה), לכן: $\lambda = \bar{\lambda}$,

לכן: $\lambda \in \mathbb{R}$.

■

מסקנה

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ואם T אופרטור סימטרי (אופרטור צמוד לעצמו), אזי $p_T(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים.

(מעל $\mathbb{C}$ כל פולינום מתפרק לגורמים ליניאריים. האופרטור סימטרי, לכן כל הערכים העצמיים שלו ממשיים, והערכים העצמיים הם שורשי הפולינום האופייני).

מסקנה

אם A מטריצה ממשית <u>סימטרית</u>, אזי $p_A(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים.

מסקנה

אם $T: V \to V$ אופרטור <u>אוניטרי</u>, ואם λ ערך עצמי של T, אזי $|\lambda| = 1$.

הוכחה

$$\lambda \cdot < v, v > = < \lambda \cdot v, v >$$

$$\lambda \cdot < v, v > = < T(v), v >$$

$$\lambda \cdot < v, v > = < v, T^*(v) >$$

$$\lambda \cdot < v, v > = < v, T^{-1}(v) >$$

$$\lambda \cdot < v, v > = < v, \frac{1}{\lambda} \cdot v >$$

$$\lambda \cdot < v, v > = \overline{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \cdot < v, v >$$

$$\boldsymbol{\lambda \cdot < v, v > = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot < v, v >}$$

$v \neq 0$ (שכן v ווקטור עצמי), לכן: $< v, v > \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (תכונות של נורמה), לכן: $\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}}$, מכאן:
$\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$, לכן: $|\lambda| = 1$.

■

מסקנה

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ואם T אופרטור אורתוגונלי (אופרטור אוניטרי), אזי $\lambda = \pm 1$.

(נובע ישירות מהגדרת המודול).

שילוש ולכסון אוניטרי

הערה

אם $T: V \to V$ אופרטור ליניארי ניתן לשילוש, אזי $p_T(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים (תנאי הכרחי לשילוש וללכסון).

משפט

כל אופרטור $T: V \to V$, כך ש - $p_T(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים, **ניתן לשילוש אוניטרי**, ז"א, קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש - $A = [T]_B$ משולשת עליונה.

הוכחה

עפ"י קריטריון שילוש, T ניתן לשילוש. לכן קיים בסיס B_0 של V, כך ש - $A_0 = [T]_{B_0}$ משולשת עליונה.

נפעיל את תהליך גראם שמידט על הבסיס B_0 לקבלת בסיס אורתונורמלי B של V.

נסמן ב $-$ C את מטריצת המעבר מהבסיס B_0 לבסיס אורתוגונלי B' (המתקבל בתום החלק העיקרי של תהליך גראם שמידט). C מטריצה מהצורה (לפי הערה מהרצאה 19):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נסמן ב - C' את מטריצת המעבר מהבסיס B' לבסיס B.

$$\text{נרמול}\begin{cases} \widetilde{v_1}^0 = \frac{1}{||\widetilde{v_1}||} \cdot \widetilde{v_1} \\ \vdots \\ \widetilde{v_n}^0 = \frac{1}{||\widetilde{v_n}||} \cdot \widetilde{v_n} \end{cases}$$

לכן:

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{1}{||\widetilde{v_1}||} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{||\widetilde{v_2}||} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{||\widetilde{v_{n-1}}||} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{||\widetilde{v_n}||} \end{pmatrix}$$

לכן, מטריצת המעבר C_0 מ – B_0 ל - B, שווה למכפלה $C \cdot C'$.

לכן היא מטריצה משולשת עליונה, כמכפלה של מטריצות משולשיות עליונות.

לכן, ל - $A = [T]_B$ מתקיים: $\overbrace{C_0}^{\text{משולשת}} \cdot \overbrace{A_0}^{\text{משולשת}} \cdot \overbrace{C_0^{-1}}^{\text{משולשת}} = A$.

לכן A משולשת עליונה, כמכפלה של מטריצות משולשיות עליונות.

■

משפט (שילוש אוניטרי למטריצות)

תהי A_0 מטריצה ריבועית כך ש - $p_{A_0}(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש - $A = P^{-1} \cdot A_0 \cdot P$ <u>משולשת עליונה</u>.

הוכחה

נבחר ב - $V = \mathbb{F}^n$ בסיס <u>אורתונורמלי</u> B_0. נגדיר $T: V \to V$ ע״י $T(x) = A_0 \cdot x$. אזי: $A_0 = [T]_{B_0}$.

(**נימוק:** $C_i([T]_{B_0}) = [T(v_i)]_{B_0} = [A_0 \cdot v_i]_{B_0} = C_i(A_0)$).

לפי המשפט הקודם, T ניתן לשילוש אוניטרי, ז״א, קיים בסיס <u>אורתונורמלי</u> B של V כך ש - $A = [T]_B$ משולשת עליונה.

לכן: $A = P^{-1} \cdot A_0 \cdot P$, כש – P היא מטריצת המעבר מ – B_0 ל - B. משום ש - B, B_0 בסיסים אורתונורמליים, נקבל ש – P מטריצה אוניטרית (לפי משפט מהרצאה 17).

■

למה

אם A מטריצה משולשת ונורמלית, אז A אלכסונית.

הוכחה

נתון: $A\cdot A^* = A\cdot A^*$ ו $A-$ משולשת.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \overline{A^t} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \overline{a_{23}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{n-1,n}} & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

נחשב:

$$(A\cdot A^*)_{11} = a_{11}\cdot\overline{a_{11}} + a_{12}\cdot\overline{a_{12}} + \cdots + a_{1n}\cdot\overline{a_{1n}} = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2$$

$$(A^*\cdot A)_{11} = \overline{a_{11}}\cdot a_{11} = |a_{11}|^2$$

מהשוויון - $A\cdot A^* = A\cdot A^*$ נקבל: $|a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2 = 0$, לכן: $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$.

לכן:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \wedge A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \overline{a_{22}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \overline{a_{23}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{n-1,n}} & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

נחשב:

$$(A\cdot A^*)_{22} = a_{22}\cdot\overline{a_{22}} + a_{23}\cdot\overline{a_{23}} + \cdots + a_{2n}\cdot\overline{a_{2n}} = |a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2$$

$$(A^*\cdot A)_{22} = \overline{a_{22}}\cdot a_{22} = |a_{22}|^2$$

מהשוויון - $A\cdot A^* = A\cdot A^*$ נקבל: $|a_{23}|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2 = 0$, לכן: $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$.

לכן:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & a_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \wedge A^{*}=\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \overline{a_{22}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \overline{a_{n-1,n}} & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

נמשיך באינדוקציה ונקבל:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

לכן, A אלכסונית, כדרוש.

■

משפט (לכסון אוניטרי לאופרטור נורמלי)

יהי $T:V\to V$ אופרטור <u>נורמלי</u> כך ש - $p_T(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים. אזי T **ניתן ללכסון אוניטרי**, ז"א, קיים בסיס אורתונורמלי B של V, כך ש - $A=[T]_B$ היא מטריצה <u>אלכסונית</u>.

הוכחה

לפי המשפט הקודם על שילוש אוניטרי, קיים בסיס <u>אורתונורמלי</u> B של V, כך ש - $A=[T]_B$ היא מטריצה משולשת עליונה.

מצד שני, משום ש - T נורמלי ו - B אורתונורמלי, A היא מטריצה נורמלית (לפי משפט מהרצאה 21), ולפי הלמה הקודמת – A מטריצה אלכסונית.

■